



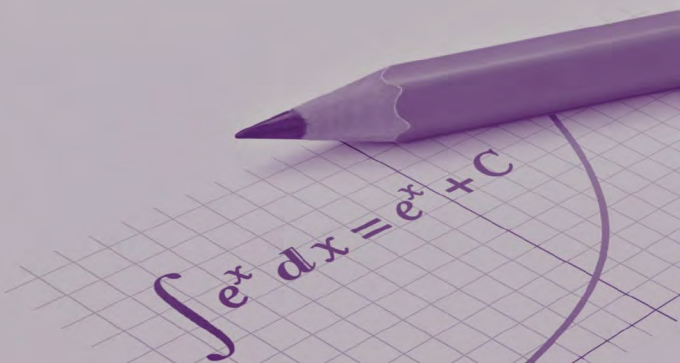
Religación
Press
Ideas desde el Sur Global

int Instituto
Nelson
Torres

EXPLORANDO EL MUNDO DEL CÁLCULO

TEORÍA Y APLICACIONES

CARLOS ANDRÉS ACOSTA JARAMILLO
WILSON ALEXIS MÁRQUEZ COCA
ALBA ELIZABETH FLORES RUÍZ
JUAN DAVID CHIMARRO AMAGUAÑA
PATRICIA EMPERATRIZ LANCHANGO QUIMBIULCO



| Colección Matemática |

Explorando el mundo del cálculo

Teoría y aplicaciones

Carlos Andrés Acosta Jaramillo, Wilson Alexis Márquez Coca,
Alba Elizabeth Flores Ruiz, Juan David Chimarro Amaguaña,
Patricia Emperatriz Lanchango Quimbiulco

RELIGACION PRESS
QUITO · 2023



Equipo Editorial

Eduardo Díaz R. Editor Jefe
Roberto Simbaña Q. Director Editorial
Felipe Carrión. Director de Comunicación
Ana Benalcázar. Coordinadora Editorial
Ana Wagner. Asistente Editorial

Consejo Editorial

Jean-Arsène Yao | Dilrabo Keldiyorovna Bakhronova | Fabiana Parra |
Mateus Gamba Torres | Siti Mistima Maat | Nikoleta Zampaki | Silvina
Sosa



Religación Press, es una iniciativa del Centro de Investigaciones CICSHAL-RELIGACIÓN.

Diseño, diagramación y portada: Religación Press.
CP 170515, Quito, Ecuador. América del Sur.
Correo electrónico: press@religacion.com
www.religacion.com

Explorando el mundo del cálculo. Teoría y aplicaciones

Exploring the world of calculus. Theory and applications

Explorando o mundo do cálculo. Teoria e aplicações

Derechos de autor: Carlos Andrés Acosta Jaramillo©, Wilson Alexis Márquez Coca©, Alba Elizabeth Flores Ruíz©, Juan David Chimarro Amaguaña©, Patricia Emperatriz Lanchango Quimbiulco©, Religación Press©

Primera Edición: 2023

Editorial: Religación Press

Materia Dewey: 510 – Matemáticas

Clasificación Thema: PBKA – Cálculo

BISAC: MAT000000 MATHEMATICS / General

Público objetivo: Profesional/Académico

Colección: Matemática

Soporte: Digital

Formato: Epub (.epub)/PDF (.pdf)

Publicado: 2023-12-06

ISBN: 978-9942-642-47-9

Este título se publica bajo una licencia de Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0)



Citar como (APA 7)

Acosta Jaramillo, C.A., Márquez Coca, W.A., Flores Ruíz, A.E., Chimarro Amaguaña, J.D., y Lanchango Quimbiulco, P.E. (2023). *Explorando el mundo del cálculo. Teoría y aplicaciones*. Religación Press. <https://doi.org/10.46652/ReligacionPress.118>

Patrocinio:

Instituto Superior Tecnológico Nelson Torres.

Cayambe, Ecuador. Avenida Luis Cordero, Vía a Ayora.

ISBN: 978-9942-642-47-9



9 789942 642479

<https://press.religacion.com>

Revisión por pares / Peer Review

Este libro fue sometido a un proceso de dictaminación por académicos externos. Por lo tanto, la investigación contenida en este libro cuenta con el aval de expertos en el tema, quienes han emitido un juicio objetivo del mismo, siguiendo criterios de índole científica para valorar la solidez académica del trabajo.

This book was reviewed by an independent external reviewers. Therefore, the research contained in this book has the endorsement of experts on the subject, who have issued an objective judgment of it, following scientific criteria to assess the academic soundness of the work.

Sobre los autores



Carlos Andrés Acosta Jaramillo

Instituto de Educación Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
<https://orcid.org/0000-0003-4336-259X>
carlos.acosta@intsuperior.edu.ec

Docente Investigador en el área de Desarrollo de Software con una Maestría en Diseño y Gestión de proyectos Tecnológicos, cursando una Maestría en Ingeniería Matemática y Computación, y cursando un Doctorado en Educación, de profesión Ingeniero en Mecatrónica.



Wilson Alexis Márquez Coca

Instituto de Educación Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
<https://orcid.org/0000-0001-7923-9417>
alexis.marquez@intsuperior.edu.ec

Como Ingeniero en Sistemas e Informática y con una sólida experiencia profesional, ha desempeñado un papel crucial en el ámbito académico y tecnológico, consolidando una trayectoria de cinco años como jefe Departamental de Telemática en la Sede Ibarra de la Universidad Uniandes. Actualmente es docente en el Instituto Superior Tecnológico Nelson Torres.



Alba Elizabeth Flores Ruíz

Instituto de Educación Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
<https://orcid.org/0009-0008-4074-051X>
alba.flores@intsuperior.edu.ec

Licenciada en Sistemas Computacionales, con una maestría en Tecnología Educativa y Competencias Digitales, 5 años de experiencia como Docente en Educación Superior.



Juan David Chamarro Amaguaña

Instituto de Educación Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
<https://orcid.org/0000-0001-9454-8357>
juan.chimarro@intsuperior.edu.ec

Docente Investigador en el área de Desarrollo de Software con una Maestría en Telemática e Ingeniería en Mecatrónica, cursando un Doctorado en Educación. Con sólida y contrastada experiencia en el manejo de multiplataformas de desarrollo de software y lenguajes de programación, desarrollo de aplicaciones móviles en tiempo real, computación en la nube (Cloud Computing).



Patricia Emperatriz Lanchango Quimbiulco

Instituto de Educación Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
<https://orcid.org/0009-0003-7566-5656>
patricia.lanchango@intsuperior.edu.ec

Licenciada en Administración de Empresas.

Resumen

"Explorando el mundo del cálculo. Teoría y aplicaciones" es un libro que busca dar a los lectores una sólida comprensión de los conceptos y técnicas del cálculo. Comienza con límites y continuidad, las derivadas y su aplicación en problemas relacionados con el movimiento, la optimización y la aproximación de funciones. También se aborda la resolución de problemas del mundo real y se estudian integrales, que son esenciales para la determinación de áreas y volúmenes. El libro concluye con aplicaciones avanzadas de integrales. En resumen, es una guía integral para comprender y resolver problemas en diversos campos de estudio.

Palabras claves: matemáticas; cálculo; integrales; áreas

Abstract

"Exploring the World of Calculus. Theory and Applications" is a book that seeks to give readers a solid understanding of the concepts and techniques of calculus. It begins with limits and continuity, derivatives and their application in problems related to motion, optimization and function approximation. It also addresses solving real-world problems and studies integrals, which are essential for determining areas and volumes. The book concludes with advanced applications of integrals. In summary, it is a comprehensive guide to understanding and solving problems in various fields of study.

Keywords: mathematics; calculus; integrals; áreas.

Resumo

"Explorando o Mundo do Cálculo. Theory and Applications" é um livro que visa dar aos leitores uma sólida compreensão dos conceitos e técnicas de cálculo. Ele começa com limites e continuidade, derivadas e sua aplicação a problemas que envolvem movimento, otimização e aproximação de funções. Também trata da resolução de problemas do mundo real e estuda integrais, que são essenciais para a determinação de áreas e volumes. O livro conclui com aplicações avançadas de integrais. Em suma, é um guia abrangente para compreender e resolver problemas em vários campos de estudo.

Palavras-chave: matemática; cálculo; integrais; áreas.

Contenido

Revisión por pares / Peer Review	7
Sobre los autores	8
Resumen	9
Abstract	9
Resumo	9
Prólogo	19
Introducción	21
 Capítulo 1	
Funciones	25
1.1 Funciones.	26
Conceptos básicos	26
1.2 Elementos para definir una función	26
1.3 Características de una función	26
1.3.1 Clasificación de una función	27
Función algebraica	27
Ejercicios en clase	28
1.4 Límites y continuidad	28
Ejercicios en clase	30
Ejercicios en clase	31
1.5 Propiedades de los límites	31
Resumen propiedades de los límites	36
1.6 Aplicaciones de propiedades simultaneas	37
Ejercicios en clase	37
1.7 Límites algebraicos	38
Ejercicios en clase	38
Ejercicios en clase	39
1.8 Límites trigonométricos	40
Ejercicios en clase	40
1.9 Límites indeterminados infinito sobre infinito	41
Ejercicios en clase	41
Ejercicios en clase	42
1.10 Límites indeterminados uno elevado al infinito	42
Trabajo autónomo	44
Autoevaluación	46

Capítulo 2

Derivadas

48

2.1 Derivada de una función.	49
Conceptos básicos	49
Ejercicios en clase	49
2.2 Reglas de derivación.	50
2.2.1 Regla de la constante:	50
Ejercicios en clase	50
2.2.2 Regla de la potencia:	50
Ejercicios en clase	51
Ejercicios en clase	51
2.2.3 Regla del factor constante	51
Ejercicios en clase	52
Ejercicios en clase	52
Ejercicios en clase	53
2.2.4 Regla de la suma y de la resta	53
Ejercicios en clase	53
Ejercicios en clase	55
Ejercicios en clase	55
2.2.5 Razón de cambio	56
Ejercicios en clase	57
Aplicación de la razón de cambio	57
Trabajo autónomo	59
Autoevaluación	59
2.2.6 Regla del producto y del cociente	60
Ejercicios en clase	60
Ejercicios en clase	61
Trabajo autónomo	62
Autoevaluación	63
2.2.7 Regla de la cadena	63
Ejercicios en clase	64
2.2.8 Regla de la potencia generalizada	65
Ejercicios en clase	66
Trabajo autónomo	67
Autoevaluación	67
2.2.9 Derivadas de funciones logarítmicas.	67
Ejercicios en clase	69
2.2.10 Derivadas de orden superior	70
Ejercicios en clase	71
Trabajo autónomo	72
Autoevaluación	72

Capítulo 3

Aplicaciones de derivadas (trazado de curvas)	74
3.1 Extremos relativos	75
Conceptos básicos	75
Ejercicios en clase	75
3.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado	77
Ejercicios en clase	79
3.3 Prueba de la segunda derivada.	81
Ejercicios en clase	82
3.4 Aplicación de máximos y mínimos.	83
Ejercicios en clase	83
Trabajo autónomo	86
Autoevaluación	86

Capítulo 4

Integrales	88
4.1 Integrales indefinidas	89
Conceptos básicos	89
4.2 Propiedades de las integrales indefinidas.	90
4.3 Ejercicios con integrales inmediatas.	91
Ejercicios en clase	91
4.4 Integración por sustitución.	93
Ejercicios en clase	94
Trabajo autónomo	98
Autoevaluación	98
4.5 Integración por partes.	99
Ejercicios en clase	100
4.6 Integral cíclica.	100
Ejercicios en clase	101
4.7 Integral por fracciones parciales.	102
Ejercicios en clase	102
Ejercicios en clase	103
4.8 Integral definida.	106
Ejercicios en clase	107
4.9 Teorema fundamental de cálculo.	108
Ejercicios en clase	108
4.10 Propiedad de la integral definida	110

Capítulo 5**Aplicaciones de integrales****112**

5.1 Valor medio para integrales.

113

Conceptos básicos

113

Ejercicios en clase

116

5.2 Movimiento rectilíneo

117

Ejercicios en clase

119

Ejercicios en clase

120

5.3 Distancia total.

122

Ejercicios en clase

122

Trabajo autónomo

123

Autoevaluación

123

5.4 Áreas.

124

Ejercicios en clase

125

5.5 Áreas entre curvas

126

Ejercicios en clase

126

Ejercicios en clase

127

Ejercicios en clase

127

Trabajo autónomo

129

Autoevaluación

129

Referencias**131**

Ilustraciones

Ilustración 1. Regla de correspondencia	26
Ilustración 2. Clasificación de funciones	27
Ilustración 3. Límite x tiende a 2	28
Ilustración 4. Límite de una función constante	32
Ilustración 5. Límite de la función identidad	32
Ilustración 6. Límite de una suma de funciones	32
Ilustración 7. Límite de una diferencia de funciones	33
Ilustración 8. Límite de un producto de funciones	33
Ilustración 9. Límite de un cociente de funciones	34
Ilustración 10. Límite de una raíz	35
Ilustración 11. Límite de una potencia	35
Ilustración 12. Resumen de propiedades de los límites	36
Ilustración 13. Ejemplo aplicaciones de propiedades simultaneas	37
Ilustración 14. Regla de la cadena	64
Ilustración 15. Regla de la potencia generalizada	65
Ilustración 16. Gráfica extremos absolutos	78
Ilustración 17. Gráfica máximos y mínimos	79
Ilustración 18. Demostración Integral Cíclica	101
Ilustración 19. Formula de velocidad y aceleración en integrales	117
Ilustración 20. Movimiento en un recta vertical	118

| Colección Matemática |

Explorando el mundo del cálculo

Teoría y aplicaciones

Prólogo

Bienvenidos a un viaje fascinante a través del mundo del cálculo, un campo de las matemáticas que ha sido fundamental para comprender y describir una amplia gama de fenómenos en la ciencia, la ingeniería y muchas otras disciplinas. En “Explorando el Mundo del Cálculo. Teoría y Aplicaciones”, te invitamos a adentrarte en un reino de ideas abstractas y herramientas prácticas que han revolucionado nuestra comprensión del mundo que nos rodea.

El cálculo es mucho más que un conjunto de reglas y fórmulas. Es un lenguaje universal que nos permite describir cómo cambian las cosas, desde la velocidad de un automóvil en movimiento hasta la acumulación de infinitamente pequeños incrementos. A través de estas páginas, te guiaremos a través de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral y te mostraremos cómo aplicarlos en situaciones del mundo real.

El cálculo puede parecer imponente al principio, pero no te preocupes. Este libro está diseñado para que cualquier persona, desde principiantes hasta estudiantes avanzados, pueda sumergirse en sus páginas y adquirir una comprensión sólida de los principios del cálculo. A medida que avanzamos, te proporcionaremos ejemplos claros, ilustraciones y problemas resueltos para ayudarte a dominar los conceptos y técnicas.

Más allá de las matemáticas puras, el cálculo tiene aplicaciones en campos tan diversos como la física, la economía, la biología y la informática, entre otros. A lo largo de este libro,

exploraremos cómo el cálculo es una herramienta poderosa en la resolución de problemas del mundo real. Desde el análisis de movimiento y crecimiento, hasta la optimización de procesos y la modelización de fenómenos complejos, el cálculo tiene un papel crucial en la toma de decisiones informadas.

Ya seas un estudiante que se adentra en el cálculo por primera vez o un profesional que busca refrescar sus conocimientos, “Explorando el Mundo del Cálculo” te ofrece una guía sólida y un compañero de aprendizaje. Nuestro objetivo es hacer que el cálculo sea accesible y comprensible, mostrándote cómo se aplica en situaciones reales y cómo puede enriquecer tu comprensión del mundo.

Así que prepárate para embarcarte en este emocionante viaje a través del mundo del cálculo. Descubrirás que el cálculo no solo es una herramienta esencial en las matemáticas, sino también una forma de pensar y resolver problemas que puede cambiar la forma en que ves el mundo que te rodea.

Los autores.

Introducción

El Cálculo Diferencial e Integral es una asignatura que permite modelar todos los aspectos de la naturaleza en las ciencias físicas, exactas y otras. Pero su implicación para modelar la naturaleza tiene una mayor profundidad de lo que pueda suponer esta simple aplicación geométrica. El cálculo diferencial sirve para poder llevar a cabo todos aquellos problemas científicos a la vida cotidiana y así poder resolver cualquier situación compleja de una manera más sencilla. El cálculo diferencial e integral en la generación de hardware hace más eficiente, esta ingeniería, aplica los principios de la informática, el análisis matemático y físico para el diseño, desarrollo, prueba y evaluación de los sistemas de información y programas informáticos que se utilizan en entornos profesionales y de ocio; por ello es que ésta pertenece al eje profesional de la Carrera de Tecnología Superior en Desarrollo de Software.

El propósito de la asignatura de cálculo diferencial e integral en la formación del tecnólogo en Desarrollo de Software, es aplicar los diferentes métodos de cálculo integral para las programaciones de software, analizando y modelando procesos con la ayuda del cálculo Integral.

Para cumplir con dichos objetivos, el texto nos propone hacer una exposición clara y sistemática de los conceptos, métodos, procesos y sistemas de evaluación y valoraciones relevantes; orientados en todo momento a asociarlo a la formación de los tecnólogos en Desarrollo de Software.

Los contenidos de la asignatura están estructurados en tres unidades, dos en el primer bimestre y una en el segundo bimestre.

Dentro del primer bimestre en la Unidad 1: “Límites” se abordarán temas relacionados a límites y continuidad, y la Unidad 2: “Derivadas” donde se abordará temas relacionados con derivadas, y la Unidad 3 “Aplicaciones con derivadas” donde se abordará temas relacionados a áreas y aplicaciones con derivadas, y finalmente una evaluación por cada unidad.

En el segundo bimestre se revisará la Unidad 4 titulada “Integrales”, en esta unidad se estudian temas relacionados con integrales, y por último la Unidad 5 “Aplicaciones con integrales” donde se abordará temas relacionados con cálculos de áreas bajo la curva y aplicaciones con integrales, y finalmente una evaluación por cada unidad.

Se espera que el presente material apoye en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura y fortalezca el autoaprendizaje.

Objetivos

Aplicar los diferentes métodos de cálculo integral para las programaciones de software, analiza y modela procesos con la ayuda del cálculo Integral.

Competencias

Programar Sistemas Informáticos Bajo Especificaciones Funcionales y Técnicas Requeridas, mediante la aplicación de metodologías de software satisfaciendo las necesidades del mercado.

Capítulo 1

Funciones

1.1 Funciones.



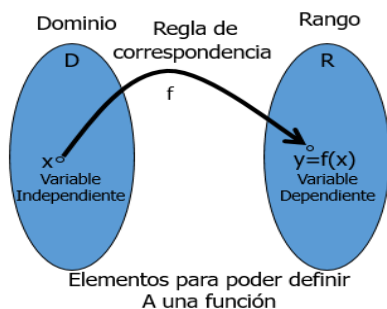
CONCEPTOS BÁSICOS

Una Función es un tipo de relación (correspondencia) que existe entre dos variables, con la condición de que a cada valor de la variable independiente (Dominio) le corresponde un sólo valor de la variable dependiente (Rango).

1.2 Elementos para definir una Función

Para construir una función es necesario tener dos conjuntos D y R y una regla de correspondencia, como se ilustra en el siguiente diagrama.

Ilustración 1. Regla de correspondencia



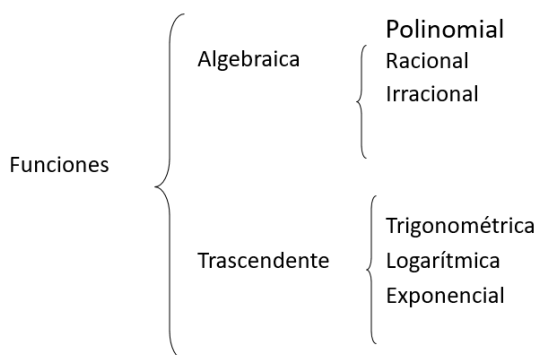
1.3 Características de una función

- Dominio: Conjunto de valores que pueden asignarse a la variable independiente para los cuales la función existe o está definida.
- Rango: Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente en una función.

- Valores positivos y negativos
- Ceros de la función o intersección con el eje “x”
- Intersección con el eje “y”
- Máximos y mínimos.
- Concavidad (Hacia arriba o hacia abajo)
- Asíntotas horizontales y verticales.

1.3.1 Clasificación de una función

Ilustración 2. Clasificación de funciones



Fuente: (Granville, 2009).

Función algebraica

Es aquella que puede expresarse como un número finito de sumas, diferencias, múltiplos, cocientes y radicales que contienen (Granville, 2009).

Algunos ejemplos son: x^n

$$f(x) = (3x+2) + (5x-8)$$

$$g(x) = (x+2) - (x-6)$$

$$h(x) = \frac{(2x-3)}{(x^2+1)}$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x^2 - 4x + 2}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Dado $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, demostrar que $f(1) = 12$, $f(5) = 0$, $f(0) = 20$, $f(7) = 90$

$$f(1) = (1)^3 - 5(1)^2 - 4(1) + 20 = 12$$

$$f(5) = (5)^3 - 5(5)^2 - 4(5) + 20 = 0$$

$$f(0) = (0)^3 - 5(0)^2 - 4(0) + 20 = 20$$

$$f(7) = (7)^3 - 5(7)^2 - 4(7) + 20 = 90$$

1.4 Límites y continuidad

Comencemos revisando ciertos aspectos que son importantes dentro del tema:

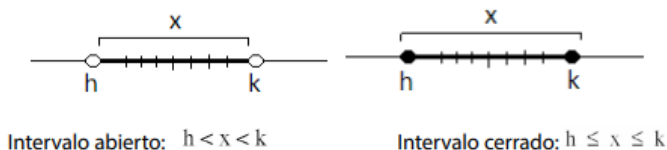
La función de una variable y es función de la variable x , sin embargo, para cada valor de x perteneciente a su campo de variación, le corresponde un valor de y . La variable y , cuyo valor depende del que tome x , recibe el nombre de variable dependiente, mientras que x toma el nombre de variable independiente. Para su mayor comprensión presento el siguiente ejemplo:

La ecuación $x^2 + y = 9$, siendo la variable independiente, asigna un valor a para cada valor que se dé

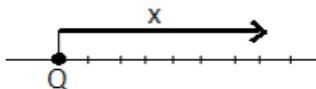
a. Entonces si despejamos la variable dependiente tenemos que $y = 9 - x^2$

Intervalos finitos. Si tomamos como referencia dos puntos cualquiera h y k tales que $h > k$ el conjunto de todos los números x comprendidos entre h y k reciben el nombre de intervalo abierto de h asta k y se lo escribe $h < x < k$. Los extremos del intervalo estarían representados por h y k y a diferencia de un intervalo abierto, este no contiene sus extremos.

Un intervalo cerrado en cambio contempla el intervalo abierto, y sus extremos, en este caso h y k , el cual se lo escribe. Finalmente, su representación gráfica estaría dada de la siguiente manera:



Intervalos infinitos. Sea Q un valor cualquiera. El conjunto de todos los números x tales que $x < Q$ recibe el nombre de intervalo infinito. También se da el caso de otros intervalos infinitos como son los definidos por $x \leq Q$, $x > Q$ y $x \geq Q$ y se ilustra a continuación:





EJERCICIOS EN CLASE

Ejercicio: Determine el límite.

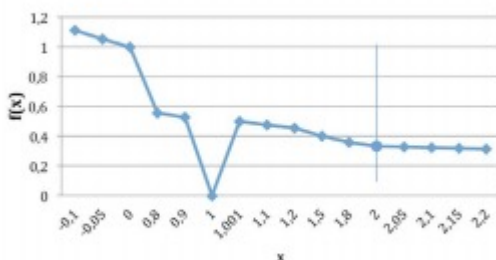
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-1}$$

Para determinar si existe el límite de la función, primeramente, realizar la tabla de valores correspondiente a la función, aquí usted puede ver que si a le damos el valor de 1 y es una indeterminación.

Se expresa los límites por la derecha o por la izquierda, por la izquierda tenemos $x \rightarrow a^-$ y análogamente por la derecha $x \rightarrow a^+$.

Observe la gráfica que a continuación se representa, por la izquierda los valores entre 1,001 hacia 2 en el eje de las x, corresponden a los valores del límite que tienden por la izquierda y los valores correspondientes desde 2,2 hacia 2 son los valores del límite que tienden por la derecha.

Ilustración 3. Limite x tiende a 2



Como podemos observar en este caso si existe el límite, cuando x tiende a 2, este valor es 0,33 ; además en la tabla de valores cuando x tiende a 2 tanto por la derecha como por la izquierda los valores de $f(x)$ o y (en algunos casos se usa esta nomenclatura) cada vez se acercan más y más a 0,33.

En conclusión, el límite de la función $f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-1}$ es igual a 0,33.



EJERCICIOS EN CLASE

Ejercicio: Determine el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x+3}$$

Al reemplazar el valor de x en la ecuación, el denominador se hace cero, por lo tanto, tenemos como resultado limite al infinito.

$$= \frac{2}{0} = \infty$$

1.5 Propiedades de los límites

Para facilitar el proceso de hallar límites, existe ciertas reglas sobre estos. Cualquiera de estas puede ser verificada usando la definición formal de límite.

1. Límite de una función constante:

Ilustración 4. Límite de una función constante

El límite cuando $x \rightarrow a$; de una función constante $f(x) = k$ es igual a k ; Simbólicamente: $\lim_{x \rightarrow a} k = k$

EJEMPLO:: El límite cuando $x \rightarrow 2$; de $f(x) = 5$ es: $\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$

2. Límite de la función identidad:

Ilustración 5. Límite de la función identidad

El límite cuando $x \rightarrow a$; de la función identidad $f(x) = x$ es igual a a ; Simbólicamente: $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

EJEMPLO:: El límite cuando $x \rightarrow 0$; de $f(x) = x$ es: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

3. Límite de una suma de funciones:

Ilustración 6. Límite de una suma de funciones

El límite cuando $x \rightarrow a$; de una suma de funciones $[f(x) + g(x)]$ es igual la suma de los límites de cada función, simbólicamente;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

EJEMPLO:: Si $f(x) = 4x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, El límite cuando $x \rightarrow 1$; de $f(x) + g(x) = 4x^2 + 3x + 1$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 + 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (1)^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (1) + \lim_{x \rightarrow 1} 1$$

$$4 \cdot (1) + 3 \cdot (1) + 1 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 + 3x + 1 = 8$$

4. Límite de una diferencia de funciones:

Ilustración 7. Límite de una diferencia de funciones

El límite cuando $x \rightarrow a$; de una diferencia de funciones $[f(x) - g(x)]$ es igual la diferencia de los límites de cada función, simbólicamente;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

EJEMPLO:: si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, El límite cuando $x \rightarrow -3$; de $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 1$ es:

$$\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow -3} x^2 - \lim_{x \rightarrow -3} 2x - \lim_{x \rightarrow -3} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - \lim_{x \rightarrow -3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -3} x - \lim_{x \rightarrow -3} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (-3)^2 - \lim_{x \rightarrow -3} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -3} (-3) - \lim_{x \rightarrow -3} 1$$

$$(-3)^2 - 2(-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - 2x - 1 = 14$$

5. Límite de un producto de funciones:

Ilustración 8. Límite de un producto de funciones

El límite cuando $x \rightarrow a$; de un producto de funciones $[f(x) \cdot g(x)]$ es igual la producto de los límites de cada función, simbólicamente;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

EJEMPLO:: Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, El límite cuando $x \rightarrow 1$; de $f(x) \cdot g(x) = (x + 1) \cdot (x - 1)$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 \right)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} 1 + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} 1 - \lim_{x \rightarrow 1} 1 \right)$$

$$(2) \cdot (0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x - 1) = 0$$

6. Límite de un cociente de funciones:

Ilustración 9. Límite de un cociente de funciones

El límite cuando $x \rightarrow a$; de un cociente de funciones $[f(x) \div g(x)]$ es igual la cociente de los límites de cada función, simbólicamente;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \div g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \div \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

EJEMPLO:: Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, El límite cuando $x \rightarrow 2$; de $f(x) \div g(x) = (x + 1) \div (x - 1)$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)}{(x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} 2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}$$

$$\frac{2 + 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)}{(x - 1)} = 3$$

7. Límite de una raíz:

Ilustración 10. Límite de una raíz

El límite cuando $x \rightarrow a$; de una función raíz $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ es igual a la raíz del límite; si $g(x) > 0$,
Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

EJEMPLO:: Si $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, El límite cuando $x \rightarrow 4$; de $f(x)$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1)}$$

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 1}$$

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} 4 + \lim_{x \rightarrow 4} 1}$$

$$\sqrt{4 \cdot (2) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 1} = 3$$

Fuente: (Purcell et al., 2017)

8. Límite de una potencia:

Ilustración 11. Límite de una potencia

El límite cuando $x \rightarrow a$; de una función potencia $f(x) = [g(x)]^n$ es igual a la potencia del límite;
Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

Fuente: (Purcell et al., 2017)

EJEMPLO:: Si $f(x) = (x + 1)^2$ El límite cuando $x \rightarrow 2$; de $f(x)$ es:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)^2 = [\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)]^2$$

$$[\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1]^2$$

$$[\lim_{x \rightarrow 2} 2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1]^2$$

$$[2 + 1]^2 = [3]^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)^2 = 9$$

Resumen propiedades de los límites

Ilustración 12. Resumen de propiedades de los límites

Una constante	$\lim_{x \rightarrow c} k = k$
La función identidad	$\lim_{x \rightarrow c} x = c$
El producto de una función y una constante	$\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
Una suma	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
Una resta	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
Un producto	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
Un cociente	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$.
Una potencia	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} f(x)^{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ si $f(x) > 0$
Un logaritmo	$\lim_{x \rightarrow c} \log f(x) = \log \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
El número e	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Fuente: (Granville, 2009)

1.6 Aplicaciones de propiedades simultaneas

Ilustración 13. Ejemplo aplicaciones de propiedades simultaneas

EJEMPLO:: Hallar el límite de la siguiente función

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 + 3x}{\lim_{x \rightarrow -2} x - 3}$$

Límite de un cociente

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} 3x}{\lim_{x \rightarrow -2} x - \lim_{x \rightarrow -2} 3}$$

Límite de una suma

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -2} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow -2} x}{\lim_{x \rightarrow -2} x - \lim_{x \rightarrow -2} 3}$$

Límite de una producto

$$\frac{2 \cdot (-2)^2 + 3(-2)}{(-2) - 3} = \frac{8 - 6}{-2 - 3} = -\frac{2}{5}$$

Operando y simplificando

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3} = -\frac{2}{5}$$

Fuente: (Purcell et al., 2017)



EJERCICIOS EN CLASE

Ejercicio: Determine el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 5}{x - 8}$$

Solución: en este caso tenemos el límite de un cociente cuando:

1. Aplicar la propiedad del límite de un cociente siempre y cuando el denominador al ser reemplazado por su variable no dé como resultado límite cero.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x-8} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x+5)}{\lim_{x \rightarrow 4} (x-8)}$$

Utilizar la propiedad 3. Esto es, el límite de una suma o diferencia.

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x) + \lim_{x \rightarrow 4} (5)}{\lim_{x \rightarrow 4} (x) - \lim_{x \rightarrow 4} (8)}$$

Reemplazar el valor de x

$$= \frac{4+5}{4-8}$$

$$= \frac{9}{-4}$$

1.7 Límites algebraicos



EJERCICIOS EN CLASE

Ejercicio: Casos especiales

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)$$

Solución: Para resolver este ejercicio aplicaremos los siguientes pasos (Coronel & Coronel, 2012):

1. Reemplazar $x=1$ en la función, esto nos daría como resultado una indeterminación del tipo $0/0$. Por ello, para obtener el límite en este ejercicio, procedemos de la siguiente forma:

2. Factora el denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

3. Simplificar el factor x-1.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

4. Reemplazar el valor de x y resolver.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)} \\ &= \frac{1}{(1+1)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



EJERCICIOS EN CLASE

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2-25} \right)$$

Al evaluar el límite problema el lector puede apreciar que se presenta una indeterminación matemática de la forma 0/0 es decir:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2-25} \right) = \frac{5-5}{5^2-25} = \frac{0}{0}$$

Solución:

Para la resolución del problema se utiliza la técnica de cancelación, para lo cual se factoriza el denominador. Cómo en el denominador se tiene una diferencia de cuadrados, se procede a la fac-

torización utilizando la siguiente fórmula: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2-25} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)}{(x+5)(x-5)} =$$

Se cancela los factores semejantes:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+5)}$$

Se evalúa el límite resultante:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+5)} = \frac{1}{(5+5)} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2-25} \right) = \frac{1}{10}$$

1.8 Límites trigonométricos



EJERCICIOS EN CLASE

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2}$$

Análisis para un cambio de variable:

Se tiene que si $x \rightarrow -2$, entonces $\tan \pi x \rightarrow 0$ y $x+2 \rightarrow 0$, por tanto tenemos una indeterminación matemática de la forma $0/0$.

Para resolver el límite problema, es necesario realizar un cambio de variable, para poder utilizar el límite notable:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Es decir :}$$

Si $x \rightarrow -2$, entonces es obvio que

$x+2 \rightarrow 0$. Sea $y = x+2$, donde $x = y-2$.

Entonces, si $x \rightarrow -2$, entonces $y \rightarrow 0$. Por tanto, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan \pi (y-2)}{y} =$$

Para continuar en la solución del problema, se requiere utilizar la identidad trigonométrica

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\tan \pi (y-2) = \frac{\tan \pi y - \tan 2\pi}{1 + \tan \pi y \tan 2\pi} = \tan \pi y, \text{ por tanto, se obtiene:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan \pi (y-2)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan \pi y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan \pi y}{\pi y} * \pi = \\ &= \pi \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi y} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y} = \pi \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \pi y}{\pi y} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \pi y} \right] = \\ &= \pi (1 * 1) = \pi * 1 = \pi \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2} = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2} = \pi$$

1.9 Límites indeterminados infinito sobre infinito



EJERCICIOS EN CLASE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-1}$$

Al evaluar el límite se obtiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = 1$$



EJERCICIOS EN CLASE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x-1}$$

Al evaluar el límite se obtiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{0-0} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \infty$$

1.10 Límites indeterminados uno elevado al infinito



EJERCICIOS EN CLASE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}$$

Al evaluar el límite se obtiene la indeterminación 1^∞ .

Propiedad del número e

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Se identifica $f(x)$ y $g(x)$ y se sustituye en la fórmula:

$$f(x) = \frac{x+a}{x+b} \quad \text{y} \quad g(x) = x+c$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+c) \left(\frac{x+a}{x+b} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+c) \left(\frac{x+a-x-b}{x+b}\right)} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+c) \left(\frac{a-b}{x+b}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax-bx+ac-bc}{x+b}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(a-b)+ac-bc}{x+b}\right)} = e^{a-b}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c} = e^{a-b}$$



TRABAJO AUTÓNOMO

Encontrar los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2-25} \right) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2-x-3}{x+1} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^3-1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2-x}{x^2-4} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3-8}{x-2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2+x-6}{x^2-9} \right) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3+1}{x+1} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4-\sqrt{x}}{x-16} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x}{3x^3-1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(2+x)} \right] - \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x}{3x-1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^5-32}{x-2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x^2}{3x-1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-2x^{3/2}}{3x^2-4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2+x-6}{x+3} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-2x^{3/2}}{3x^{3/2}-4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-\cos x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(3+x)} \right] - \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-2x^{3/2}}{3x-4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(4+x)} \right] - \frac{1}{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4x^2+1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3-27}{x^2-9} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4x^2+1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2+3})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4x^2+1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2+3})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4\sqrt{x+1}} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{8x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{8x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+3}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2+3}{2x+5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{-x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{-x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\left(\frac{x^2-2}{x^2+x-1}\right)^{3x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\left(\frac{x^2-2}{x^2+x-1}\right)^{3x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^x$$



AUTOEVALUACIÓN

Encontrar los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -5} 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 3} \frac{(s+h)^2 - 64}{h-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+4)^3 - 8}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (2x - 8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{x^2 + 5x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x^2 + 11}{x+5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^3} - \frac{x^2 + 9}{x^3 - 6x + 5} \right]$$

Capítulo 2

Derivadas

2.1 Derivada de una función.



CONCEPTOS BÁSICOS

Derivada de una función. La derivada de una función $f(x)$ con respecto a x en el punto c se define como:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Siempre y cuando el límite exista



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de $f(x) = \frac{2}{x+1}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se evalúa la función en $f(x+h)$ y se sustituye $f(x)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(x+h)+1} - \frac{2}{x+1}}{h}$$

Se realiza la suma algebraica de fracciones

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+1) - 2(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

Se aplica la propiedad distributiva y se simplifica

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-2h}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2h}{h(x+h+1)(x+1)} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

Observe que cuando se simplifica el factor h del numerador con el denominador la indeterminación desaparece.

2.2 Reglas de Derivación.

2.2.1 Regla de la constante:

Si f es una función constante, esto es $f(x) = c$, entonces

$$f'(x) = 0$$

La derivada de una constante es 0



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de

a) $\frac{d}{dx}(5) = 0$

b) Si $f(x) = \ln 3$, entonces $f'(x) = 0$

c) Sea $g(x) = \sqrt{2}$ para calcular $g'(4)$ primero observamos que $g'(x) = 0$ y al evaluar g' en 4 obtenemos que $g'(4) = 0$.

2.2.2 Regla de la potencia:

Si $f(x) = x^r$, donde r es un número real distinto de 0, entonces

$$f'(x) = rx^{r-1}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de

a) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$

b) Si $f(x) = x^{10}$, entonces $f'(x) = 10x^9$

c) Si $g(x) = x$, entonces $g'(x) = 1 \cdot x^0$. Así $g'(x) = 1$

Efectivamente la función $g(x) = x$ es una recta cuya pendiente es 1

d) $(x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Funciones con radicales. Las funciones con radicales se reescriben con exponente fraccionario.



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de

$f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ entonces se reescribe como $f(x) = x^{5/3}$.

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}.$$

2.2.3 Regla del factor constante

Si f es una función derivable en x y c una constante cf es derivable y $(cf(x))' = cf'(x)$.

En notación de Leibniz

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}(f(x))$$

El factor constante sale fuera de la derivación.



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de $f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

entonces se reescribe como

$$f(x) = 5 \cdot x^{2/3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^{2/3})' = 5(x^{2/3})' \\ &= 5 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

Funciones fraccionarias con denominador constante:

$$\frac{r g(x)}{k} = \frac{r}{k} g(x), \quad r \text{ y } k \text{ constantes.}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de $h(x) = \frac{2\sqrt{x}}{3}$

entonces se reescribe como $h(x) = \frac{2}{3} x^{1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} x^{1/2} \right) &= \frac{2}{3} \frac{d}{dx} (x^{1/2}) \\ \frac{d}{dx} (h(x)) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{3\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Funciones fraccionarias con numerador constante:

$$\frac{r}{k g(x)} = \frac{r}{k} \frac{1}{g(x)} = \frac{r}{k} (g(x))^{-1}, \text{ donde } r \text{ y } k \text{ son constantes.}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de $h(x) = \frac{2}{3x^9}$,

entonces se reescribe como

$$h(x) = \frac{2}{3} x^{-9}$$

$$h'(x) = \left(\frac{2}{3} x^{-9}\right)' = \frac{2}{3} (x^{-9})'$$

$$h'(x) = \frac{2}{3} (-9)x^{-10} = -6 \cdot x^{-10} = -\frac{6}{x^{10}}$$

2.2.4 Regla de la suma y de la resta

Sean f y g funciones derivables en x , entonces $f + g$ y $f - g$ también lo son y

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$((f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

La derivada de una diferencia es la diferencia de las derivas.



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de $h(z) = \sqrt{z} + \frac{4z^2}{3}$,

entonces se reescribe como

$$\begin{aligned} h(z) &= z^{1/2} + \frac{4}{3} z^2 \\ h'(z) &= \left(z^{1/2} + \frac{4}{3} z^2 \right)' = (z^{1/2})' + \left(\frac{4}{3} z^2 \right)' \\ &= \frac{1}{2} z^{-1/2} + \frac{4}{3} (z^2)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{8}{3} z \end{aligned}$$

Calcule la derivada de

$$\begin{aligned} g(x) &= 4x^{-4} - \sqrt{3} + 3x \\ g'(x) &= \left(4x^{-4} - \sqrt{3} + 3x \right)' \\ &= (4x^{-4})' - (\sqrt{3})' + (3x)' \\ &= 4(x^{-4})' - 0 + 3(x)' \\ &= -16x^{-5} + 3 \end{aligned}$$

Un cociente donde el denominador consta de un solo término en x^r .

$$\frac{a_1 x^{r_1} + \dots + a_n x^{r_n}}{c x^k} = \frac{a_1 x^{r_1}}{c x^k} + \dots + \frac{a_n x^{r_n}}{c x^k} = \frac{a_1}{c} x^{r_1-k} + \dots + \frac{a_n}{c} x^{r_n-k}, \quad r_i, k \text{ constantes}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de $g(x) = \frac{3x^5 - 2x^2 - x}{3x^2}$,

entonces se reescribe como

$$g(x) = \frac{3x^5}{3x^2} - \frac{2x^2}{3x^2} - \frac{x}{3x^2},$$

$$g(x) = x^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{-1}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{-1} \right)' \\ &= (x^3)' - \left(\frac{2}{3} \right)' - \left(\frac{1}{3}x^{-1} \right)' \\ &= 3x^2 - \frac{1}{3}(-1)x^{-2} \end{aligned}$$

Un producto se transforma en una suma al usar la propiedad distributiva.



EJERCICIOS EN CLASE

Calcule la derivada de

$$g(x) = \sqrt{x}(3x - 4\sqrt{x} - 1)$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^{1/2} (3x - 4\sqrt{x} - 1) \\
 &= 3x \cdot x^{1/2} - 4x - x^{1/2} \\
 g(x) &= 3x^{3/2} - 4x - x^{1/2} . \\
 g'(x) &= (3x^{3/2} - 4x - x^{1/2})' \\
 &= (3x^{3/2})' - (4x)' - (x^{1/2})' \\
 &= 3(x^{3/2})' - 4(x)' - \frac{1}{2}x^{-1/2} . \\
 &= \frac{9}{2}x^{1/2} - 4 - \frac{1}{2x^{1/2}} \\
 g'(x) &= \frac{x^{-1/2}}{2} (9x - 8x^{1/2} - 1)
 \end{aligned}$$

2.2.5 Razón de cambio

En general, una razón de cambio con respecto al tiempo es la rapidez con que varía una cantidad, es decir, la derivada dy/dx de una función $y=f(x)$ es una razón de cambio instantánea con respecto a la variable x . Si la función representa posición o distancia entonces la razón de cambio con respecto al tiempo se interpreta como velocidad.

Si dos cantidades están relacionadas entre sí, entonces cuando una de ellas cambia con el tiempo, la otra cambia también. Por lo tanto, sus razones de cambio (con respecto al tiempo) están relacionadas entre sí. A este tipo de cambio se le llama razón de cambio relacionadas.

Ahora que usted ya conoce el tema pasaremos a mostrar que el problema de hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto P es el equivalente matemático al problema de encontrar la razón de cambio de la función en x .

A continuación, propongo el siguiente ejercicio que le ayudará a comprender mejor el tema.



EJERCICIOS EN CLASE

Aplicación de la razón de cambio

La gerencia de una empresa a determinado que la función de demanda semanal de cierto producto está dada por $p=f(x)=114-x^2$ donde p se mide en dólares y x en unidades de millar.

a. Hallar la razón de cambio promedio en el precio unitario si la cantidad demandada está entre 5000 y 6000 unidades; entre 5000 y 5010.

b. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea del precio unitario cuando la cantidad demandada es de 5000 unidades?

Solución del literal a: en este caso la razón de cambio promedio del precio unitario de producto si la cantidad demandada está entre x y $x+h$ es

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[114 - (x+h)^2] - (114 - x^2)}{h} \\ &= \frac{114 - x^2 - 2x(h) - h^2 - 114 + x^2}{h} \\ &= -2x - h \end{aligned}$$

Como lo que nos pide es encontrar la razón de cambio promedio del precio unitario del producto cuando la cantidad demandada está entre 5000 y 6000 unidades (es decir en el intervalo $[5,6]$), se hace $x=5$ y $h=1$, con lo que se obtiene al reemplazar en la ecuación $-2x-h$

$$-2(5)-1=-11$$

Nos indica que -\$11 por cada 1000 unidades de producto (recuerde que x se mide en unidades de millar.) De manera análoga, al hacer $h=0.1$ y $h=0.01$ con $x=5$, se tiene que las razones de cambio promedio del precio unitario entre 5000 y 5100 y entre 5000 y 5010 son -10.10 y -10.01 dólares para cada mil unidades de producto.

Solución del literal b: en el literal b nos pide encontrar la razón de cambio instantánea del precio unitario del producto cuando la cantidad demandada es x unidades.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = -2x$$

La razón de cambio instantánea del precio unitario cuando la cantidad demandada es de 5000 está dada por $-2(5)=-10$ esto es por cada 1000 unidades de producto.

Conviene en este momento estudiar otra de las propiedades utilizadas en la derivación de funciones



TRABAJO AUTÓNOMO

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$1.1) f(x) = x^7;$$

$$1.2) f(x) = 9x^2;$$

$$1.3) f(x) = \sqrt{5};$$

$$1.4) g(w) = \sqrt{5}w;$$

$$1.5) f(x) = \ln(2)x^2;$$

$$1.6) f(x) = \frac{1}{3}x^2;$$

$$1.7) f(x) = \frac{x^2}{3};$$

$$1.8) y = -x^2 + 2x;$$

$$1.9) h(w) = w^9 - 3w^3 + e^2;$$

$$1.10) y = 108(x^2 + 1167);$$

$$1.11) f(x) = \frac{5}{2}(4 - x^2);$$

$$1.12) f(x) = \frac{5(4 - x^2)}{2};$$

$$1.13) f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2};$$

$$1.14) h(s) = s^{3/4} - 3s^{-1/3};$$

$$1.15) f(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$1.16) f(x) = \sqrt{2}x^{-3};$$

$$1.17) C(q) = \frac{4}{5q};$$

$$1.18) C(q) = \frac{q^3}{5} - \frac{5}{q^3};$$



AUTOEVALUACIÓN

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2}x;$$

$$f(s) = s^2(3s)^2;$$

$$f(s) = s^{\frac{2}{3}}(s^2 - 2s);$$

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}};$$

$$f(s) = s^2 3s^2;$$

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^3};$$

$$f(x) = x \cdot \sqrt[4]{x};$$

$$f(x) = x(4 - 5x - x^3);$$

$$f(x) = \frac{x(3 - x^2)}{2\sqrt{x}};$$

2.2.6 Regla del producto y del cociente

Regla del producto:

Sean f y g funciones derivables en x , entonces $f \cdot g$ también es derivable en x y

$$((f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La derivada de un producto de dos funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera por la derivada de la segunda.



EJERCICIOS EN CLASE

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$h(x) = (3x^2 + 4x + 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 1 \text{ y } g(x) = \sqrt{x} + 1.$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= (3x^2 + 4x + 1)'(\sqrt{x} + 1) + (3x^2 + 4x + 1)(\sqrt{x} + 1)' \\ &= (6x + 4)(\sqrt{x} + 1) + (3x^2 + 4x + 1)\frac{1}{2}x^{-1/2} \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{15}{2}x^{3/2} + 6x + 6x^{1/2} + 4 + \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Regla del cociente:

Sean f y g funciones derivables en x y $g(x) \neq 0$ entonces f/g es derivable en x y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**EJERCICIOS EN CLASE**

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 - 1}$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \text{ entre } g(x) = x^3 - 1.$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{(x^2 + 4x + 1)'(x^3 - 1) - (x^2 + 4x + 1)(x^3 - 1)'}{(x^3 - 1)^2} \\ &= \frac{(2x + 4)(x^3 - 1) - (x^2 + 4x + 1)3x^2}{(x^3 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 4x^3 - 2x - 4 - (3x^4 + 12x^3 + 3x^2)}{(x^3 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 4x^3 - 2x - 4 - 3x^4 - 12x^3 - 3x^2}{(x^3 - 1)^2} \\ h'(x) &= \frac{-x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 2x - 4}{(x^3 - 1)^2} \end{aligned}$$

**TRABAJO AUTÓNOMO**

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (4 - x^2)(x + 1);$$

$$f(s) = (s^2 + 1)(3s^2 - 3s);$$

$$h(s) = \sqrt{2s}(s^2 + 2\sqrt{s} - 1);$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(2 - x^2);$$

$$C(q) = \frac{4 - q}{q^2 - 1};$$

$$) f(t) = \frac{2t^2 + 3t - 1}{\sqrt[3]{t}};$$

$$) f(x) = x^3 \cdot \sqrt[33]{x};$$

$$) f(s) = s^{2/3}(s^2 - 2s);$$

$$) f(x) = \frac{x(3 - x^2)}{3\sqrt{x}};$$



AUTOEVALUACIÓN

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = 4 - x^2(x + 1);$$

$$f(x) = (2x - 1)(4 - 5x - x^3);$$

$$f(x) = 3(\sqrt{x} - 3)(4 - x);$$

$$C(q) = \frac{4 - q}{5q};$$

$$C(q) = \frac{q^3 - 1}{q^2 - 2q + 1};$$

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}};$$

$$f(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 4s + 4};$$

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x - 1} + \frac{1 - x}{2x - 4} - \frac{1}{3x};$$

$$f(x) = \frac{(x - 1)(3 - x^2)}{3(1 - x)};$$

2.2.7 Regla de la cadena

La regla de la cadena es usada para derivar funciones compuestas. La función $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ la interpretamos como una composición. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ilustración 14. Regla de la cadena

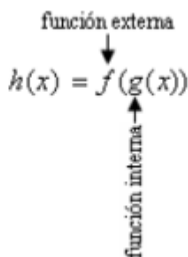
Regla de la cadena

Teorema.- Sean f y g dos funciones tales que f es diferenciable en $g(x)$ y g es diferenciable en x , entonces $h = (f \circ g)$ es diferenciable en x y

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Fuente: (Granville, 2009)

La derivada de una composición es la derivada de la función externa f , evaluada en la interna por la derivada de la interna.



En la notación de Leibniz si consideramos $u = g(x)$, la regla de la cadena queda expresada como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**EJERCICIOS EN CLASE**

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$h(x) = (2x^3 + 1)^{33}$$

Se define la función interna $u = g(x) = 2x^3 + 1$ y la función externa $f(u) = u^{33}$

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = 6x^2 \quad \text{y} \quad f'(u) = 33u^{32}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f'(2x^3 + 1) \cdot 6x^2 \\ &= 33(2x^3 + 1)^{32} \cdot 6x^2 \\ &= 198x^2(x^3 + 1)^{32} \end{aligned}$$

2.2.8 Regla de la potencia generalizada

Ilustración 15. Regla de la potencia generalizada

$$\left((g(x))^r \right)' = r(g(x))^{r-1} g'(x)$$

Demostración: si definimos la externa como $f(u) = u^r$; y simplemente $u = g(x)$. Entonces

$$h(x) = (f \circ g)(x) \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad \text{y} \quad f'(u) = ru^{r-1}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= r(g(x))^{r-1} \cdot g'(x) \end{aligned}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Reescribimos la función

$$h(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$$

$$h'(x) = r((g(x))^{r-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1}(2x)$$

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$$

$$f'(x) = (2(x^2 + 3x)^{-1})'$$

$$= 2(x^2 + 3x)^{-1}'$$

$$= 2(-1)(x^2 + 3x)^{-2}(x^2 + 3x)'$$

$$= 2(-1)(x^2 + 3x)^{-2}(2x + 3)$$

$$= -\frac{2(2x + 3)}{(x^2 + 3x)^2}$$

A la parte que queda por derivar se le aplica la regla de la potencia generalizada = $2r(g(x))^{r-1} \cdot g'(x)$ con $r = -1$ y $g(x) = (x^2 + 3x)$



TRABAJO AUTÓNOMO

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

- 1.1) $y = (4x - 1)^6$; 1.2) $f(x) = (4 - x^2)^4$; 1.3) $f(x) = (3x - x^2)^4$;
 1.4) $y = 4(1 + 3x - 3x^2)^2$; 1.5) $y = \frac{(3x^3 + 1)^3}{4}$; 1.6) $y = (4x^2 + 1)^{-4}$;
 1.7) $f(x) = \frac{1}{(3x - 1)}$; 1.8) $f(x) = \frac{2}{(3x^2 + 1)^2}$; 1.9) $f(t) = \sqrt{t + 3}$;
 1.10) $f(x) = 5\sqrt{2x^2 + 3}$; 1.11) $y = \sqrt[3]{(1 - x)^2}$; 1.12) $f(t) = \frac{2}{5\sqrt{(3t - 1)^3}}$; 1.13)
 $f(z) = \sqrt{2z} + \sqrt{2z}$; 1.14) $f(x) = \sqrt[5]{4x} - \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$; 1.15) $f(x) = x(x - 1)^3$;
 1.16) $f(x) = 3x^2(3 - x)^5$; 1.17) $f(t) = t^2\sqrt{t + 3}$; 1.18) $f(x) = (4x - 1)^3(5x + 3)^2$;
 1.19) $y = \sqrt{(x + 3)(1 - x)}$; 1.20) $f(x) = \frac{(3x - 1)^3}{(1 - 5x)^3}$; 1.21) $f(x) = \left(\frac{3x - 1}{1 - 5x}\right)^3$;



AUTOEVALUACIÓN

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^2 - 1}{(3x + 1)^2}; & f(x) &= \sqrt[3]{\frac{3x - 1}{2 - x}}; & f(x) &= \sqrt[3]{\frac{(3x - 1)^2}{(2 - x)^5}}; \\
 f(x) &= 5(x^3 - 2x + 2)\sqrt{x + 3}; & & & f(x) &= 5x^3 - 2x + 2\sqrt{3 - x}; \\
 y &= \frac{x - 1}{4 - x} - \left(\frac{x - 1}{4}\right)^3; & f(z) &= \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{1 - z}; & h(t) &= \sqrt{(2t + 1)(t + 2)} + 2
 \end{aligned}$$

2.2.9 Derivadas de funciones logarítmicas.

A continuación, se deja a su disposición algunas notas complementarias sobre el tema. Podemos formar logaritmos con base e , los cuales se denominan logaritmos naturales o logaritmos neperianos y se denotan con el símbolo $\ln$. La definición es, la función $x = \ln y$ es la inversa de la función $y = e^x$.

Además, se define el número por la ecuación:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 2.71828$$

Si $b > 0$ y $b \neq 1$. Si $b^y = x$, entonces definimos $y = \log_b x$

El número sirve como base de los logaritmos naturales. Denotamos al logaritmo natural de x . por $\ln x = \log_e x$.

Logaritmos en base 10:

Los logaritmos en base 10 son logaritmos también llamados logaritmos vulgares o logaritmos decimales, están representados por el símbolo $\log$ y por lo general no se le coloca la base, pues se entiende que está en base diez (10).

Logaritmos naturales:

Estos logaritmos están representados simbólicamente como $\ln$ y su base es el número e cuyo valor irracional es de 2.718281828...

Propiedades de los Logaritmos

Sin importar el valor de las bases, los logaritmos tienen las mismas propiedades y nos servirán de mucha ayuda ya sea que estemos resolviendo ecuaciones logarítmicas, derivadas o integrales.

$$1. \log A + \log B = \log AB$$

$$2. \log A - \log B = \log \frac{A}{B}$$

$$3. A \log B = \log B^A$$

Fórmulas de derivadas de logaritmos

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$y = \text{Ln } u$$

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \log_a u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$y = \ln 5x$$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(5x)}{5x}$$

En este primer ejemplo, observamos que nuestro argumento es $5x$, es decir que $u = 5x$, si aplicamos la fórmula de la derivada de un logaritmo natural.

Entonces tenemos:

$$y' = \frac{5}{5x} y' = \frac{1}{x}$$

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$y = x^4 \text{Ln } x$$

$$y' = 4x^{4-1} \cdot \text{Ln } x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = 4x^3 \text{Ln } x + x^3 = x^3(4\text{Ln } x + 1)$$

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$y = x^3 \ln(4 - x)$$

$$y' = 3x^{3-1} \cdot \ln(4 - x) + x^3 \cdot \frac{-1}{4 - x} = 3x^2 \cdot \ln(4 - x) - \frac{x^3}{4 - x}$$

Encuentre la derivada de la siguiente función

$$y = u^n$$

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$u = \ln(5x) \quad \rightarrow \quad u' = 5/5x$$

$$y' = 3 \cdot (\ln 5x)^{3-1} \cdot \frac{5}{5x}$$

2.2.10 Derivadas de orden superior

Si $y=f(x)$ es una función diferenciable de x , llamamos a su derivada la primera derivada de la función. Lo que detallo a continuación se encuentra en su texto básico; pero por su importancia he creído conveniente colocarlo en la guía, con la finalidad que lo recuerde siempre.

Si la primera derivada es diferenciable, su derivada se llama segunda derivada de la función original y se denota por $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'' o $f''(x)$ ¹. A su vez, la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada, y se denota por $\frac{d^3y}{dx^3}$, y''' o $f'''(x)$ ¹. Sucede lo mismo para las derivadas cuarta, quinta, etc.

Para aclarar el tema analice los ejercicios adicionales propuestos.



EJERCICIOS EN CLASE

Encuentre la derivada de la siguiente función de orden superior,

Si $y=f(x)=\ln(x+1)$, encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solución: para obtener la segunda derivada seguimos los siguientes pasos:

1. Encontrar la primera derivada.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\ln(x+1)) \\ &= \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

2. Obtener la segunda derivada de la función resultante.

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

3. Para facilitar la aplicación de la derivada subimos el denominador al numerador con signo negativo.

$$= \frac{d}{dx}((x+1)^{-1})$$

4. Desarrollar la derivada de una potencia.

$$= -1(x+1)^{-2} \frac{d}{dx}(x+1)$$

5. Una vez resuelta la derivada, la presentamos de la forma inicial.

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}$$



TRABAJO AUTÓNOMO

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{3x+7}{x^2+8}$$

$$f(x) = (x-5)(5x^2+4)$$

$$f(x) = \ln(x^3+8)$$

$$f(x) = \frac{1}{4^{5-x^2}}$$

$$f(x) = xe^{x-4}$$

$$f(x) = \ln(x + e^{x+1})$$



AUTOEVALUACIÓN

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

Encuentre $d^3 f(x)/dx$ de la función $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x + 2$

Capítulo 3

Aplicaciones de derivadas (trazado de curvas)

3.1 Extremos relativos



CONCEPTOS BÁSICOS

Es importante que usted profundice el tema siguiendo las reglas (1. Criterios para funciones crecientes o decrecientes, 2. Una condición para extremos relativos, 3. Criterios para extremos relativos) que permiten usar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y se apoye con el análisis de los gráficos.



EJERCICIOS EN CLASE

Dada la función, hallar: (a) los puntos críticos; (b) los intervalos en que y es creciente o decreciente; (c) los valores máximos y mínimos de y

Solución: para encontrar lo solicitado seguimos los siguientes pasos:

a. Puntos críticos:

1. Hallar la primera derivada.

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 8x - 10$$

2. Igualar la primera derivada a cero.

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

3. Factora para tener los valores de la variable x.

$$(2x-2)(x+5)=0$$

4. Igualar a cero los términos que están en paréntesis y luego despejamos la variable x

$$2x - 2 = 0 \quad x + 5 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -5$$

5. Por tanto, los valores críticos son

$$x = 1 \quad y \quad x = -5$$

6. Los puntos críticos los obtenemos reemplazando el valor de $x = 1$ y $x = -5$ en la ecuación dada.

$$y = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 10x$$

$$y = \frac{2}{3}(1)^3 + 4(1)^2 - 10(1) = -\frac{16}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}(-5)^3 + 4(-5)^2 - 10(-5) = \frac{200}{3}$$

Los puntos críticos serían los siguientes: $(1, -16/3)$ y $(-5, 200/3)$.

b. Intervalos en que y es creciente o decreciente:

Recuerde que cuando y' es positivo, la función y es creciente; cuando y' es negativa, la función y es decreciente.

Por tanto, para encontrar los intervalos hacemos el siguiente análisis:

Cuando $x < -5$, por ejemplo $x = -6$, $y' = (-)(-) = +$, por lo tanto, la función es creciente.

Cuando $-5 < x < 1$, digamos $x = 0$, $y' = (-)(+) = -$, por lo tanto, la función es decreciente. Cuando $x > 1$, digamos $x = 2$, $y' = (+)(+) = +$, por lo tanto, la función es creciente.

Podemos resumir los resultados en el siguiente diagrama:

$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$Y' = +$		$Y' = -$		$Y' = +$
Y crece		Y decrece		Y crece

c. Nos queda por determinar si hay máximo o mínimo en $x=1$ y $x=-5$.

Al pasar x por -5 creciendo, y' cambia de signo de $+$ a $-$; por tanto, la función tiene en $x = -5$ un valor máximo.

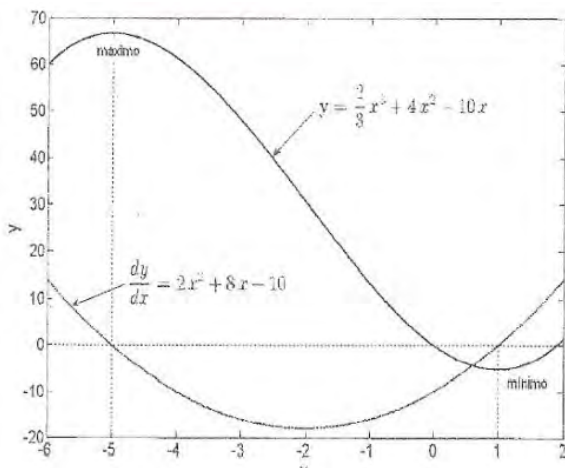
Mientras que al pasar x por 1 creciendo, y' cambia de signo de $-$ a $+$; por tanto, la función tiene en $x = 1$ un valor mínimo.

3.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, cuyos valores se llaman valores extremos de f en ese intervalo.

Para comprender mejor el tema le propongo a continuación los siguientes gráficos, los cuales nos muestran la gráfica de la función y la gráfica de la función en su primera derivada.

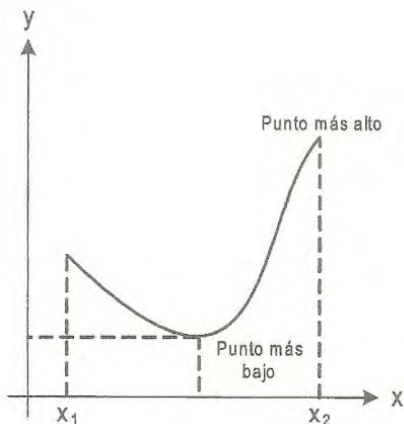
Ilustración 16. Gráfica extremos absolutos



En la gráfica anterior una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, además tiene un valor máximo (absoluto) y un valor mínimo (absoluto). Aquellos valores se conocen como valores extremos.

Para que este criterio sea aplicable, es necesario un intervalo cerrado y que la función analizada sea continua en ese intervalo. Si no se cumple alguna de las condiciones especificadas, entonces no se garantiza la existencia de valores extremos como lo podemos ver en la siguiente gráfica.

Ilustración 17. Gráfica máximos y mínimos



EJERCICIOS EN CLASE

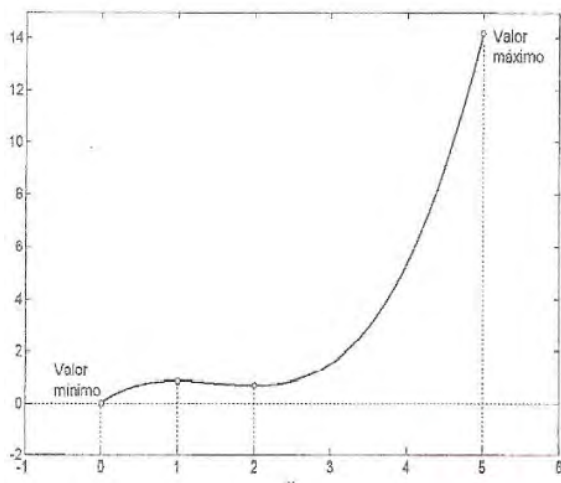
Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x)$, en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Solución: para encontrar los extremos absolutos de la función seguimos los siguientes pasos.

1. Construir la gráfica, para ello realizar la tabla de valores.

X	0	1	2	3	4	5
y	0	0,33	0,64	1,41	5,12	13,75

2. Dibujar la gráfica.



3. En este caso, $f(x)$ es continua en el intervalo $[0,5]$.

4. Localizar los puntos críticos. Para lo cual encontramos la primera derivada.

$$f'(x) = cx^{2c} - 3xc + 2$$

5. Igualar la primera derivada a cero.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

6. Factora para obtener los valores críticos.

$$(x-2)(x-1) = 0$$

7. Los valores críticos los obtenemos igualando a cero cada término.

$$x-2 = 0 \quad x-1 = 0$$

8. Por tanto, los valores críticos son $x=2$, $x=1$, y los valores extremos $x=0$ y $x=5$. Ahora se evalúa la función en cada uno de los valores:

$$f(2) = 2/3$$

$$f(1) = 5/6$$

$$f(0) = 0$$

$$f(5) = 85/6$$

De los valores obtenidos de la función, se concluye que el máximo absoluto es $f(5) = 85/6$, y el mínimo absoluto es $f(0) = 0$.

3.3 Prueba de la segunda derivada.

El criterio para máximos y mínimos no nos proporciona información en el caso de que $f''(x)=0$ o infinito, siendo necesario utilizar el criterio de la primera derivada para aquellas situaciones.



EJERCICIOS EN CLASE

Analizar los máximos y mínimos de la función, usando la prueba de la segunda derivada.

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{x}$$

Solución: para la resolución de este problema se utilizará los siguientes pasos:

1. Obtener la primera derivada.

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{8}{x^2} = 0$$

2. Igualar a cero la primera derivada.

$$x^3 - 8 = 0$$

3. Obtener el valor de x.

$x = 2$, es un valor crítico

4. Al reemplazar por $x=2$ en la función dada $y=6$, por lo tanto, el punto crítico es $(2,6)$.

5. Ahora conviene evaluarla segunda derivada de la función.

$$f''(2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{16}{x^3}$$

6. Reemplazar en la ecuación de la segunda derivada $x=2$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(2) = 1 + \frac{16}{2^3} = 3$$

7. En conclusión, podemos observar que al reemplazar $x=2$ en la segunda derivada, esta es mayor que cero.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(2) > 0$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene un valor mínimo 6 en $x=2$

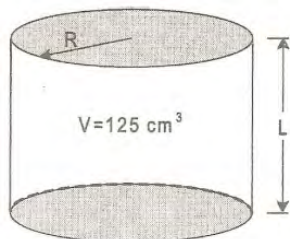
3.4 Aplicación de máximos y mínimos.

La variable independiente x se restringe a algún intervalo de valores, su dominio es el valor más grande de $f(x)$ cuando x asume todos los valores del intervalo. Así mismo el valor mínimo de $f(x)$ es el valor más pequeño de $f(x)$ a medida que x varía entre el intervalo.



EJERCICIOS EN CLASE

Una lata cilíndrica de base circular ha de contener 125cm^3 . Hallar sus dimensiones de manera que la cantidad de metal requerida sea mínima, suponiendo que la lata está abierta por arriba.



Solución: para encontrar sus dimensiones seguimos los siguientes pasos:

1. Establecer la ecuación del volumen del cilindro.

$$V = \pi R^2 L = 125$$

2. Establecer la ecuación del área de la lata.

$$A = 2\pi RL + \pi R^2$$

3. Minimizar la cantidad de metal requerida para construir la lata, por lo tanto nuestra función objeto es:

$$A = 2\pi R \left(\frac{V}{\pi R^2} \right) + \pi R^2 = \frac{2V}{R} + \pi R^2$$

4. Obtener la primera derivada.

$$\frac{dA}{dR} = -\frac{2V}{R^2} + 2\pi R$$

5. Igualar la primera derivada a cero.

$$\frac{-2V + 2\pi R^3}{R^2} = 0$$

$$-2V + 2\pi R^3 = 0$$

6. Despejar el radio (R).

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

7. Reemplazar en la ecuación el volumen.

$$R = \sqrt[3]{\frac{125cm^3}{\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} cm$$

8. Calcular el valor de despejando de la ecuación del volumen

$$V = \pi R^2 L$$

$$L = \frac{V}{\pi R^2}$$

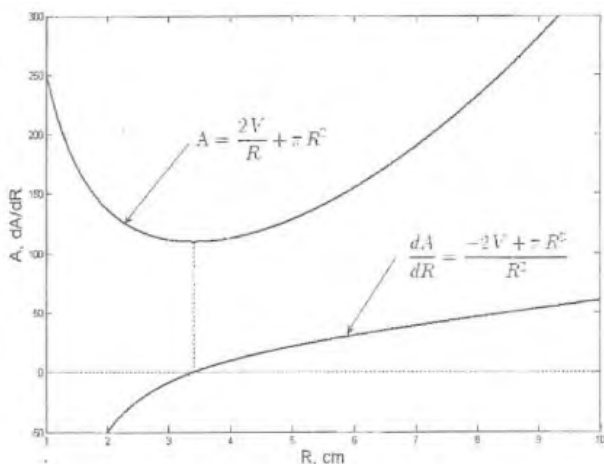
9. Reemplazar los valores en la ecuación

$$L = \frac{125}{\pi \left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} cm$$

$$L = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Así pues: R y L están dados en centímetros.

Ahora, $dA/dR > 0$ a la derecha del valor crítico, y $dA/dr < 0$ a la izquierda, así que de acuerdo al criterio de la primera derivada se trata de un mínimo relativo. Como se trata de un único punto crítico, este presenta un mínimo absoluto; esto lo puede observar en la gráfica que a continuación le presento:



TRABAJO AUTÓNOMO

Analizar los máximos y mínimos de la función $y = \frac{1}{3}3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, usando el criterio de la segunda derivada.

Hay que construir una caja abierta rectangular con base cuadrada que contenga 6400 cm³ un coste de 0.75 dólares por cm³ para la base y 0.25 dólares por cm³ para los laterales. Hallar las dimensiones más económicas.



AUTOEVALUACIÓN

1. Dada la función $y = \frac{1}{3}3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$, hallar: (a) los puntos críticos; (b) los intervalos en que y es creciente o decreciente; (c) los valores máximos y mínimos de y .

2. Encontrar los extremos absolutos de la función, en el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

Capítulo 4

Integrales

4.1 Integrales Indefinidas



CONCEPTOS BÁSICOS

El cálculo integral involucra el concepto de límite, con la aplicación de este método es posible calcular el área de una región que no puede encontrarse mediante ningún otro método conveniente.

Avancemos entonces con lo que constituye este tema, para ello debemos retroalimentar con los capítulos estudiados en el primer bimestre sobre cálculo diferencial.

Como aprendimos anteriormente la derivación de una función nos da como resultado la obtención de otra función que era su derivada, mientras que la integración es la operación inversa, en la cual, dada la derivada de una función, debemos obtener la función original. Empezaremos en primera instancia estudiando la integral indefinida.

Integral Indefinida

$$\int f(x)dx = g(x) + c$$

Siempre que

$$(g(x) + c)' = f(x)$$

4.2 Propiedades de las integrales Indefinidas.

Ejercicios

$$1. - \int dx = x + c$$

$$2. - \int K dx = K \int dx = Kx + c$$

Ejercicios

$$1) \int 4dx = 4 \int dx = 4x + c$$

$$2) \int 20dx = 20x + c$$

$$(20x + c)' = 20dx$$

$$3) \int 99999dx = 99999 \int dx = 99999x + c$$

$$3. - \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

Ejercicios

$$1) \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$$

$$2) \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{x^{-3}}{3} + c$$

$$2) \int x^{-25} dx$$

$$3) \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$4) \int x^{-\frac{5}{8}} dx = \frac{8}{3} x^{\frac{3}{8}} + c$$

$$4. \int (f(x) \mp g(x)) dx = \int f(x) dx \mp \int g(x)$$

$$1) \int (x^2 + 2) dx$$

$$\int x^2 dx + \int 2 dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

$$2) \int x^{\frac{5}{2}} dx + \int (2 - x^3 + x^8) dx$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^9}{9} + C$$

4.3 Ejercicios con integrales Inmediatas.



EJERCICIOS EN CLASE

Aplicación de las fórmulas fundamentales de integración.

$$\int x^3 dx$$

Solución: para su desarrollo seguimos los siguientes pasos:

1. Aplicar la fórmula básica de integral indefinida de una potencia.

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$

Recordemos que,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1 \quad \text{Para este ejercicio, } n=3.$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Aplicación de las fórmulas fundamentales de integración.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + c$$

$$\int \frac{2x dx}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + c$$

$$\int \frac{4x dx}{2x^2+1} = \ln|2x^2+1| + c$$

Aplicación de las fórmulas fundamentales de integración.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{x^2} 2x dx = e^{x^2} + C$$

$$\int e^{x^3} 3x^2 dx = e^{x^3} + C$$

Aplicación de las fórmulas fundamentales de integración.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$\int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln(8)} + C$$

$$\int 99^x dx = \frac{99^x}{\ln(99)} + C$$

Aplicación de las fórmulas fundamentales de integración.

$$\int \sqrt[2]{x^3} dx$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

4.4 Integración por sustitución.

Para hallar una primitiva $\int f'(x) g(f(x)) dx$, suele resultar útil sustituir $f(x)$ por una nueva variable u por medio de una sustitución $u = f(x)$, $du = f'(x) dx$. La transformación es válida. Tras hallar el miembro de la derecha, reemplazamos u por $f(x)$.

$$\int f'(x) g(f(x)) dx = \int g(u) du$$

**EJERCICIOS EN CLASE**

En los problemas siguientes encontrar la integral indefinida.

$$\int (x+5)^7$$

Solución: para encontrar la integral indefinida seguimos los siguientes pasos:

1. Hacer la sustitución $u=x+5$, luego diferenciamos du con respecto a dx y finalmente reemplazo en la integral original.

$$\int (x+5)^7 = \int u^{7du}$$

2. Resolver la integral.

$$= \frac{u^{7+1}}{7+1} C$$

$$= \frac{u^8}{8} + C$$

3. Sustituir $u=x+5$.

$$\int (x+5)^7 = \frac{(x+5)^8}{8} + C$$

En los problemas siguientes encontrar la integral indefinida.

$$\int (x^2 + 1)^4 2x \, dx$$

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2x \, dx$$

$$\int (u)^4 \, du$$

$$= \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C$$

En los problemas siguientes encontrar la integral indefinida.

$$\int (x^3 + 10)^8 x^2 \, dx$$

$$u = x^3 + 10$$

$$du = 3x^2 \, dx$$

$$\frac{du}{3} = x^2 \, dx$$

$$\int (u)^8 \frac{du}{3}$$

$$\frac{1}{3} \int (u)^8 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{(x^3 + 10)^9}{27} + C$$

En los problemas siguientes encontrar la integral indefinida.

$$\int \frac{dx}{5x-2}$$

$$u = 5x - 2$$

$$du = 5dx$$

$$\frac{du}{5} = dx$$

$$\int \frac{\frac{du}{5}}{u} = \int \frac{du}{5u} = \int \frac{1}{5} \frac{du}{u} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u}$$

$$\frac{1}{5} \ln|u| + C$$

$$\frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$$

En los problemas siguientes encontrar la integral indefinida.

$$\int e^{x^2} x dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\int e^u \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int e^u du$$

$$\frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

En los problemas siguientes encontrar la integral indefinida.

$$\int \sqrt{x^3 + 1} x^2 dx$$

$$u = x^3 + 1$$

$$du = 3x^2 dx$$

$$\frac{du}{3} = x^2 dx$$

$$\int \sqrt{u} \frac{du}{3}$$

$$\frac{1}{3} \int \sqrt{u} du$$

$$\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\frac{1}{3} * \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

$$\frac{2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

**TRABAJO AUTÓNOMO**

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$\int dx$$

$$\int \frac{1}{(x+8)^5} dx$$

$$\int (xe^{4-3x^2}) dx$$

$$\int x^2(x^2 - 4)^2 dx$$

$$\int x\sqrt{(4x^2 + 1)} dx$$

$$\int \frac{6x}{9\sqrt[3]{2-4x^2}} dx$$

$$\int (3x^2 + 2x)(x^3 + x^2 + 3)^5 dx$$

$$\int \frac{5e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int 5\sqrt[3]{4^{5+x}} dx$$

$$\int \frac{3x^3 + 3x^2 + 11x + 1}{x^2 + x + 3} dx$$

**AUTOEVALUACIÓN**

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$\int \frac{5x + 3}{4x - 1} dx$$

$$\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

$$\int e^{\tan(x)} \sec^2(x) dx$$

4.5 Integración por partes.

La integración por partes se denota por la siguiente ecuación:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Frase de integración por partes:

Un día vi: una vaca sin cola vestida de uniforme

Para conocer el a que función corresponde u se utiliza los siguientes prefijos

I	L	A	T	E
N	O	L	R	X
V	G	G	I	P
E	A	E	G	O
R	R	B	O	N
S	I	R	N	E
A	T	A	O	N
S	M	I	M	C
	I	C	E	I
	C	A	T	A
	A	S	R	L
	S		I	E
			C	S
			A	
			S	



EJERCICIOS EN CLASE

Encontrar $\int \ln(x) dx$ utilizando integración por partes.

Solución: para encontrar la integral utilizamos los siguientes pasos:

1. Asignar a cada una de las funciones diferenciables de x las correspondientes equivalencias.

$$\text{Sea } u = \ln |x| \quad dv = dx.$$

Derivar



Integrar



$$du = 1/x \, dx \quad v = x$$

2. Aplicar la fórmula de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ &= \ln(x)x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx \end{aligned}$$

3. Integrar

$$\begin{aligned} &= \ln(x)x - \int dx \\ &= x \ln(x) - x + c \end{aligned}$$

4.6 Integral cíclica.

Cuando al integrar por partes aparece en el segundo miembro la integral que hay que calcular, se resuelve como una ecuación.



EJERCICIOS EN CLASE

Derivar el siguiente ejercicio

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx$$

Ilustración 18. Demostración Integral Cíclica

$$u = \operatorname{sen} x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = \cos x$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx$$

$$u = \cos x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\operatorname{sen} x$$

$$v' = e^x \xrightarrow{\text{integrar}} v = e^x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Fuente: (González, 2019)

4.7 Integral por fracciones parciales.

Un polinomio es una fracción de la forma $\mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a^1 x + a_0}$, donde $\mathbf{a}$ es una constante, con $\mathbf{a_n \neq 0}$, y $\mathbf{n}$ un número entero positivo, llamado grado del polinomio.

Las funciones racionales propias pueden expresarse como una suma de fracciones más simples, dependiendo de la forma que tengan los factores del denominador.



EJERCICIOS EN CLASE

Derivar el siguiente ejercicio por fracciones parciales.

$$\int \frac{1}{x^2 - 16} dx$$

Solución: para desarrollar este problema seguimos los siguientes pasos.

1. Factorizar el denominador.

$$(x^2 - 16) = (x - 4)(x + 4)$$

$$\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 4}$$

2. Eliminar los denominadores.

$$1 = A(x + 4) + B(x - 4)$$

$$1 = (A + B)x + (4A - 4B)$$

3. Determinar las constantes.

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A - 4B = 1 \end{cases}$$

4. Utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones.

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 1}{-4 - 4} = \frac{1}{8}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 0}{-4 - 4} = -\frac{1}{8}$$

Por lo tanto, los valores que se obtuvo de A y B (paso cuatro), se los reemplaza en la ecuación en la ecuación del paso 1.

$$\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x - 4} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x + 4} \right)$$



EJERCICIOS EN CLASE

Derivar el siguiente ejercicio por fracciones parciales.

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 - x - 1}{x^3 - x} dx$$

Solución: como el integrando es una función racional impropia utilizamos los siguientes pasos:

1. Realizar la división.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 - x - 1 & x^3 - x \\
 \underline{-x^4} & x - 2 \\
 & + x^2 \\
 & \underline{-2x^3 + x^2 - x - 1} \\
 & + 2x^3 - 2x \\
 & \underline{} \\
 & x^2 - 3x - 1
 \end{array}$$

Esta división queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{x^4 - 2x^3 - x - 1}{x^3 - x} = x - 2 + \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x}$$

Aplicamos la integral de una suma y diferencia

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 - 2x^3 - x - 1}{x^3 - x} dx \\
 &= \int \left(x - 2 + \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} \right) dx \\
 &= \int x dx - 2 \int dx + \int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} dx
 \end{aligned}$$

Expandir

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x}$$

la función propia en fracciones simples.

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} = \frac{x^2 - 3x - 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2 - 3x - 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$$

3. Eliminar los denominadores.

$$x^2 - 3x - 1 = A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

$$x^2 - 3x - 1 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A$$

Determinamos las constantes.

$$\begin{cases} A + B + C = 1 & (1) \\ B - C = -3 & (2) \\ -A = -1 & (3) \end{cases}$$

4. Resolver el sistema de ecuaciones, obteniendo $A=1$, $B=-3/2$, $C=3/2$.

$$A=1$$

Reemplazar el valor de A en la ecuación.

$$A + B + C = 1$$

$$1 + B + C = 1$$

$$B + C = 0 \quad (4)$$

Igualar las ecuaciones 2 y 4.

$$B - \cancel{C} = -3$$

$$\frac{B + \cancel{C} = 0}{2B = -3}$$

$$2B = -3$$

$$B = -\frac{3}{2}$$

Para encontrar C reemplazar en la ecuación 4 para hallar el valor de B.

$$\begin{aligned} B + C &= 0 \\ -\frac{3}{2} + C &= 0 \\ C &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

5. Reemplazar los valores de la ecuación (paso 5) en el paso 2

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{2} \frac{1}{(x+1)}$$

6. Integrar el paso 5.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^3 - x - 1}{x^3 - x} dx \\ = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x) - \frac{3}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) + C \end{aligned}$$

4.8 Integral Definida.

Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

existe, decimos que f es integrable en $[a, b]$. Además $\int_a^b f(x) dx$, denominada integral definida (o integral de Riemann) de f de a hacia b , entonces está dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Recuerde que el símbolo $\int_a^b f(x) dx$ se lee la integral definida de $f(x)$ con respecto a x desde $x = a$ hasta $x = b$.

Además, la función $f(x)$ se llama el integrando; a y b se llaman respectivamente límite superior e inferior de integración.



EJERCICIOS EN CLASE

Calcular la integral en forma detallada y hallar el límite para $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^3 x dx$$

Solución: para el desarrollo de este ejercicio realizamos los siguientes pasos:

1. Dividir el intervalo $0 \leq x \leq 3$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = 3/n$. Entonces si x_k coincide con el extremo de cada subintervalo, es decir, que, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2 \cdot \Delta x, \dots, x_n = n \cdot \Delta x$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n (k \Delta x) \Delta x = (1 + 2 + \dots + n) (\Delta x)^2 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \left(\frac{3}{n}\right)^2 \\ &= \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_0^3 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

4.9 Teorema fundamental de cálculo.

El teorema fundamental del cálculo aclara la relación entre las derivadas y las integrales. La integración realizada en una función puede revertirse por la diferenciación.

El teorema fundamental del cálculo

Si una función $f(x)$ se define por el intervalo $[a,b]$ y si $F(x)$ es la antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Podemos utilizar la relación entre diferenciación e integración descrita en el teorema fundamental del cálculo para calcular integrales definidas más rápidamente.



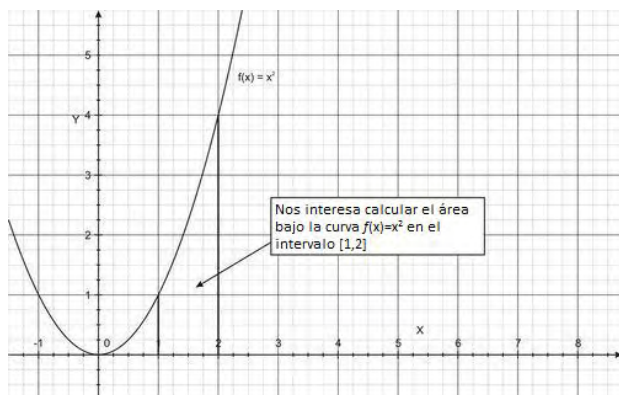
EJERCICIOS EN CLASE

Calcular la integral

$$\int_1^2 x^2 dx$$

Solución:

Esta integral nos dice que debemos calcular el área bajo la curva $f(x)=x^2$, la cual es una parábola, sobre el intervalo $[1, 2]$, como lo muestra la siguiente figura.



Para calcular la integral de acuerdo al teorema fundamental del cálculo necesitamos encontrar la antiderivada $f(x)=x^2$. Lo que resulta en $F(x)=(1/3)x^3+C$, donde C es una constante de integración. ¿Cómo podemos obtener esto? Piensa en las funciones que tienen derivadas de x^2 . Toma la derivada de $F(x)$ para comprobar que encontramos tal función.

Al sustituir en el teorema fundamental,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx &= F(x)\Big|_a^b \\
 \int_1^2 x^2 dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + C \right]_1^2 \\
 &= \left[\frac{1}{3}(2)^3 + C \right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + C \right] \\
 &= \left[\frac{8}{3} + C \right] - \left[\frac{1}{3} + C \right] \\
 &= \frac{7}{3} + C - C \\
 &= \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

Entonces, el área bajo la curva es $(7/3)$ units 2 .

4.10 Propiedad de la integral definida

1. El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la integral definida vale cero.

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

3. Si c es un punto interior del intervalo $[a, b]$, la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

4. La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

Capítulo 5

Aplicaciones de integrales

5.1 Valor medio para integrales.



CONCEPTOS BÁSICOS

Valor promedio de una función

Es sencillo hallar el promedio de un conjunto de números dados, sólo debemos realizar el siguiente cálculo y $\text{prom} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n}{n}$. ¿Cómo calculamos la temperatura promedio durante un día si se puede tener numerosas lecturas de temperaturas? ¿Qué pasa si queremos hallar el promedio de un número infinito de valores? ¿Cómo calculamos el valor promedio de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[1, 2]$? ¿Cómo calculamos el promedio de cualquier función aunque no sea positiva? Estamos en presencia de un tipo de promedio “continuo”.

Se propone calcular el valor promedio de la función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si t_i es un punto cualquiera del i -ésimo subintervalo, entonces el promedio aritmético o medio de los valores de la función en los t_i viene dado por:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n} [f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)]$$

Multiplicamos y dividimos por $(b - a)$ y resulta:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i) \frac{b-a}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x$$

La expresión $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x$ es una suma de Riemann para f en $[a, b]$. Podemos asegurar que el promedio de los n valores es $\frac{1}{b-a}$

veces la suma de Riemann de f en $[a, b]$. A medida que incrementamos la cantidad de subintervalos ($\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$) se obtiene, teniendo en cuenta la definición de integral definida:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

El valor promedio de f sobre el intervalo $[a, b]$ resulta $f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

El concepto del valor promedio de una función en un intervalo es solamente uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma.

Teorema del valor medio para integrales

Este teorema es importante porque asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio al menos en un punto (Purcell et al., 2017).

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, existe un número c en este intervalo tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Demostración:

Primer caso: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$ el resultado es trivial puesto que c puede ser cualquier punto.

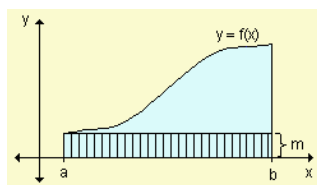
Segundo caso: Si f no es constante en $[a, b]$ elegimos m y M como el menor y mayor valor que toma f en el intervalo. Dado que $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$ por el teorema de conservación de desigualdades.

Aplicando propiedades:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ entonces } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

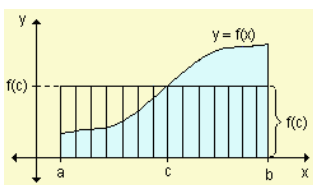
Dado que f es continua el teorema del valor intermedio asegura que f alcanza cada valor entre su mínimo y su máximo. Por lo tanto permite deducir que debe alcanzar el valor $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ en algún punto c del intervalo. $[a, b]$. Queda demostrado que existe algún c tal que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Interpretación gráfica del teorema para una función positiva:



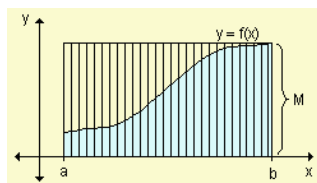
rectángulo inscrito (área menor que la de la región)

$$\int_a^b m dx = m(b-a)$$



rectángulo del valor medio (área igual que la de la región)

$$\int_a^b f(x) dx$$



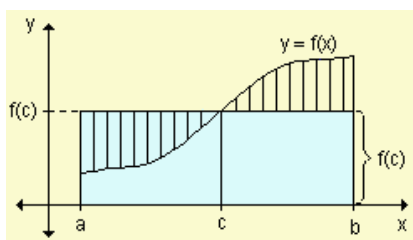
rectángulo circunscrito (área mayor que la de la región)

$$\int_a^b M dx = M(b-a)$$

El valor de c no es necesariamente único. Este teorema no especifica cómo determinar c . Solamente garantiza la existencia de algún número c en el intervalo. Permite una interpretación interesante para el caso en que f es no negativa en $[a, b]$. En este

caso $\int_a^b f(x) dx$ es el área bajo la gráfica de f entre a y b . El teorema asegura que existe un valor c del intervalo al que está asociado $f(c)$ que corresponde a la altura del rectángulo de longitud de la base $(b - a)$ y su área coincide con la de la región.

$$A = \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$



El valor de $f(c)$ hallado según el teorema del valor medio para integrales coincide con el valor promedio o medio de una función por eso a $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ se lo llama valor medio de f en el intervalo $[a, b]$.

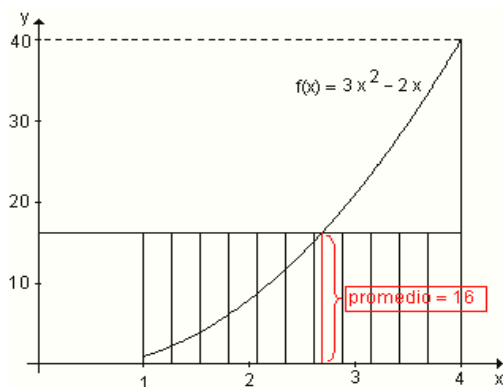


EJERCICIOS EN CLASE

Halle el valor promedio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Calculamos:

$$\begin{aligned} f_{\text{prom}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 (3x^2 - 2x) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right) \bigg|_1^4 \\ &= \frac{1}{3} (64 - 16 - 1 + 1) = 16 \end{aligned}$$



Sabemos que el área de la región es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor promedio. Se puede observar gráficamente.

5.2 Movimiento Rectilíneo

Si $s=f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces sabemos que:

Ilustración 19. Formula de velocidad y aceleración en integrales

$$\text{velocidad} = v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \text{aceleración} = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

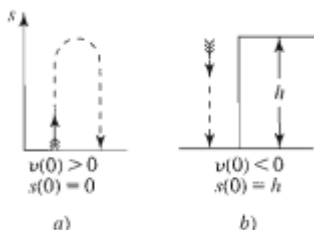
Como una consecuencia inmediata de la definición de la antiderivada, las cantidades s y v pueden escribirse como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t) dt \quad \text{y} \quad v(t) = \int a(t) dt. \quad (1)$$

Si se conocen la posición inicial $s(0)$ y la velocidad inicial $v(0)$, es posible encontrar valores específicos de las constantes de integración usadas en (1).

Recuerde que cuando el cuerpo se mueve horizontal mente sobre una recta, la dirección positiva es hacia la derecha. Para movimiento en una recta vertical, tomamos la dirección positiva hacia arriba. Como se muestra en la figura

Ilustración 20. Movimiento en una recta vertical



si una flecha se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha se dispara hacia abajo desde una altura inicial, por ejemplo h metros del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = h$, $v(0) < 0$. Sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie terrestre, como la flecha disparada hacia arriba, actúa la fuerza de gravedad. Esta fuerza provoca la aceleración de los cuerpos. Cerca de la superficie de la Tierra se supone que la aceleración debida a la gravedad, $a(t) = -g$, es una constante. La magnitud g de esta aceleración es aproximadamente 32 pies/s^2 , 9.8 m/s^2 o bien, 980 cm/s^2 .



EJERCICIOS EN CLASE

Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara vertical mente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Solución

Si se empieza con $a(t) = -9.8$, por integración indefinida obtenemos

$$v(t) = \int (-9.8) dt = -9.8t + C_1. \quad (2)$$

A partir de la condición inicial dada $v(0) = 49$, vemos que (2) implica $C_1 = 49$. Por tanto,

$$v(t) = -9.8t + 49,$$

y así $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Observe que $v(2) > 0$ implica que el proyectil se desplaza hacia arriba.

Luego, la altitud del proyectil, medida a partir del nivel del suelo, es la integral indefinida de la función velocidad,

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9.8t + 49) dt = -4.9t^2 + 49t + C_2. \quad (3)$$

Puesto que el proyectil inicia su movimiento a partir del nivel del suelo, $s(0) = 0$ y (3) proporcionan $C_2 = 0$. Por tanto,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \quad (4)$$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Luego, al resolver $-9.8t + 49 = 0$ obtenemos $t = 5$. Por (4) encontramos que la altura correspondiente es $s(5) = 122.5$ m.

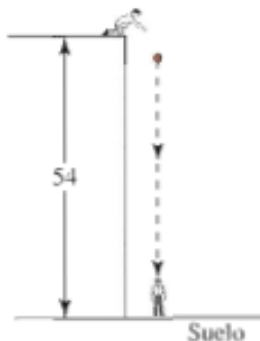
Finalmente, para encontrar el instante en que el proyectil choca contra el suelo, resolvemos $s(t) = 0$ o $-4.9t^2 + 49t = 0$. Cuando la última ecuación se escribe como $-4.9t(t-10) = 0$, vemos que el proyectil permanece en el aire 10s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s.



EJERCICIOS EN CLASE

Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura?



Solución

En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota se lanza hacia abajo, $v(0) = -8$. Luego,

$$v(t) = \int (-32) dt = -32t + C_1,$$

Al usar la velocidad inicial $v(0) = -8$ encontramos $C_1 = -8$. En consecuencia,

$$v(t) = -32t - 8.$$

Al continuar encontramos

$$s(t) = \int (-32t - 8) dt = -16t^2 - 8t + C_2.$$

Cuando $t = 0$, sabemos que $s = 54$ y así la última ecuación implica $C_2 = 54$. Entonces

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el instante que corresponde a $s = 6$, resolvemos

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Al simplificar obtenemos

$$-8(2t - 3)(t + 2) = 0 \text{ y } t = \frac{3}{2}.$$

Entonces, la velocidad de la pelota cuando golpea a la persona es $v\left(\frac{3}{2}\right) = -56$ pies/s.

5.3 Distancia total.

La distancia total que un objeto recorre rectilíneamente en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\text{distancia total} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt. \quad (5)$$

En (5) se requiere el valor absoluto porque el objeto puede moverse a la izquierda, de modo que durante algún tiempo tiene velocidad negativa.



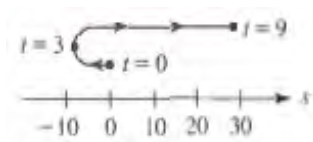
EJERCICIOS EN CLASE

Distancia recorrida

La función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 9]$.

Solución

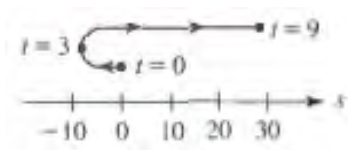
La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t - 3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la figura



a saber: $v < 0$ para $0 \leq t < 3$ (movimiento a la izquierda) y $v \geq 0$ para $3 \leq t \leq 9$ (movimiento a la derecha). Entonces, por (5) la distancia recorrida es

$$\begin{aligned}
 \int_0^9 |2t - 6| dt &= \int_0^3 |2t - 6| dt + \int_3^9 |2t - 6| dt \\
 &= \int_0^3 -(2t - 6) dt + \int_3^9 (2t - 6) dt \\
 &= (-t^2 + 6t) \Big|_0^3 + (t^2 - 6t) \Big|_3^9 = 45 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Por supuesto, el ultimo resultado debe ser consistente con la cifra obtenida al simplemente contar las unidades en la figura



entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$.



TRABAJO AUTÓNOMO

Un cuerpo se mueve en Línea recta con velocidad $v(t)$. Encuentre la función posición $s(t)$.

1. $v(t) = 6$; $s = 5$ cuando $t = 2$
2. $v(t) = 2t + 1$; $s = 0$ cuando $t = 1$



AUTOEVALUACIÓN

Un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t)$. Encuentre $v(t)$ y $s(t)$.

1. $a(t) = -5$; $v = 4$ y $s = 2$ cuando $t = 1$
8. $a(t) = 6t$; $v = 0$ y $s = -5$ cuando $t = 2$

5.4 Áreas.

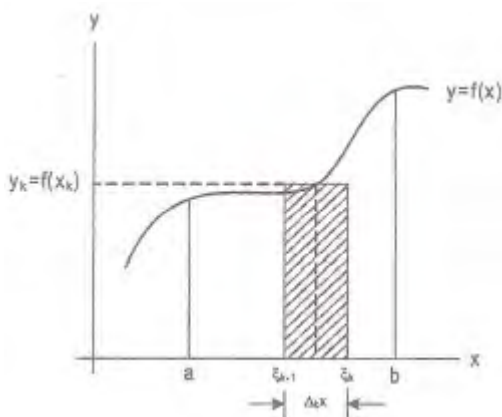
Si $f(x)$ es continua y no negativa en el intervalo $a \leq x \leq b$, la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$$

corresponde al área de la porción del plano bajo la curva $y=f(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$.

Para calcular áreas por integración conviene tener presente los siguientes pasos:

1. Hacer un gráfico que muestre el área en cuestión, una franja representativa (k -ésima) y el rectángulo aproximadamente.
2. Escribir el área del rectángulo aproximadamente y la suma para los rectángulos.



3. Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



EJERCICIOS EN CLASE

Aplicar el teorema fundamental del cálculo para determinar el área de la región.

$$y = 5x + 2, x = 1, x = 4$$

Solución: Para encontrar el área de la región seguimos los siguientes pasos.

1. Plantear la integral.

$$\text{Área} = \int_1^4 (5x + 2) dx$$

2. Calcular la integral.

$$= \left[\frac{5x^2}{2} + 2x \right]_1^4$$

3. Reemplazar la variable aplicando el teorema fundamental de la integral definida

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{5(4)^2}{2} + 2(4) \right] - \left[\frac{5(1)^2}{2} + 2(1) \right] \\ &= \left[\frac{80}{2} + 8 \right] - \left[\frac{5}{2} + 2 \right] \\ &= \frac{96}{2} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{87}{2} \end{aligned}$$

5.5 Áreas entre curvas



EJERCICIOS EN CLASE

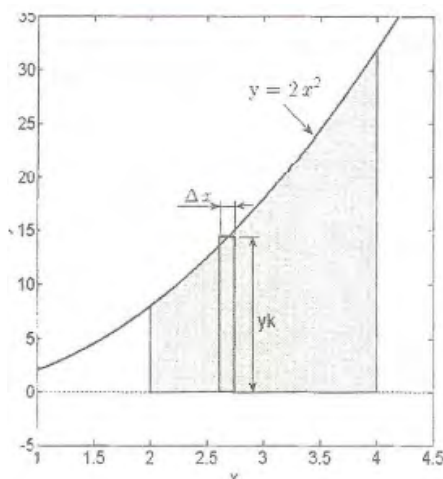
Hallar el área limitada por la curva $y = 2x^2$ y las rectas $x=2$ y $x = 4$.

Solución: en este caso se realiza la representación gráfica para demostrar el área bajo la curva, para lo cual seguimos los siguientes pasos:

1. Realizar la tabla de valores.

X	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32	40,5

2. Graficar.



3. Calcular la integral.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2x_k^2 \Delta_k x = \int_2^4 2x^2 dx$$

4. Reemplazar la variable aplicando el teorema fundamental de la integral definida.

$$\left[\frac{2}{3} x^3 \right]_2^4 = \frac{128}{3} - \frac{16}{3} = \frac{112}{3}$$



EJERCICIOS EN CLASE

Hallar el área entre la curva y el eje .

Solución: para hallar el área utilizamos los siguientes pasos:

1. Encontrar los puntos de intersección,

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-2)(x-1) = 0$$

Por lo tanto la curva corta al eje x en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 0$



EJERCICIOS EN CLASE

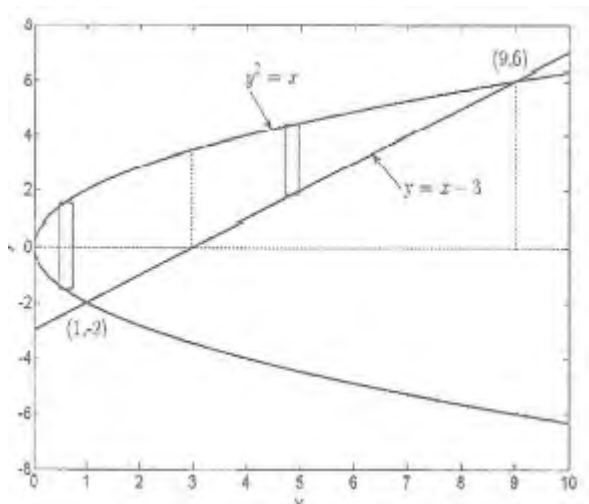
Hallar el área acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x - 3$

Solución: para encontrar el área entre la curva de la parábola y la recta seguimos los siguientes pasos:

1. Realizar la tabla de valores.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	±2	±2,82	±3,46	±4	±4,47	±4,89	±5,29	±5,65	±6	±6,32

2. Graficar



3. Utilizar la integral para calcular el área en función de los límites $x=1$, $x=0$ y $x=9$, $x=1$.

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx + \int_1^9 (\sqrt{x} - (x - 3)) dx$$

4. Calcular la integral.

$$\int_0^1 2\sqrt{x} dx + \int_1^9 (\sqrt{x} - (x - 3)) dx = \left[\frac{4}{3} x^{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_1^9$$

5. Reemplazar la variable aplicando el teorema fundamental de la integral definida

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$



TRABAJO AUTÓNOMO

Hallar el área limitada por la curva $y = x^3$ y las rectas $x = -1$ y $x = 4$



AUTOEVALUACIÓN

Hallar el área limitada por la curva $y = x^2 - 2x$, y, $y = 3x - x^2$.

Referencias

- Coronel Pérez, P.P., & Coronel López, P.J. (2012). *250 Límites resueltos de las formas*. Litoformas.
- Granville, W. (2009). *Calculo Diferencial e Integral*. Limusa.
- Pérez González, F.J. (2019). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Universidad de Granada.
- Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2017). *Calculo diferencial e integral*. Pearson.



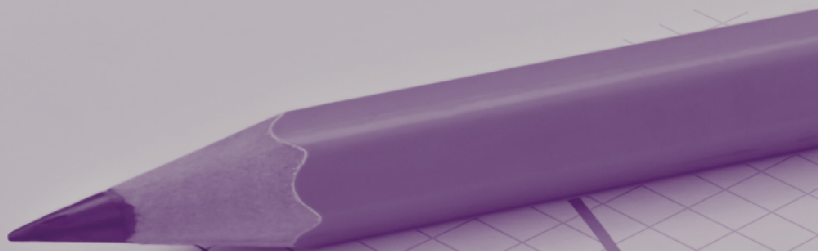
Religación **Press**

Ideas desde el Sur Global



Religación
Press
Ideas desde el Sur Global

int Instituto
Nelson
Torres



ISBN: 978-9942-642-47-9



9 789942 642479