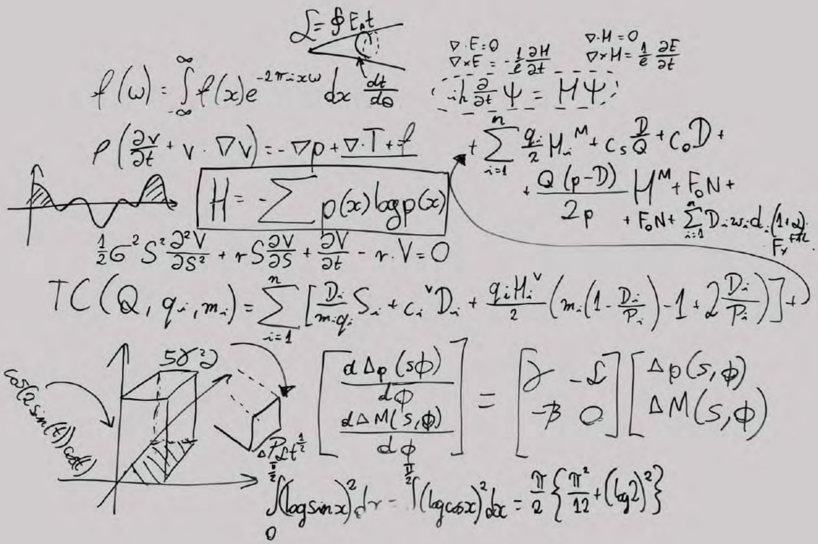
Religación
Press
Ideas desde el Sur Global

int Instituto Nelson Torres

DOMINANDO LOS NÚMEROS

GUÍA COMPLETA DE MATEMÁTICAS BÁSICAS



ÁNGEL REIMUNDO QUILUMBAQUIN IMBAQUINGO
MÓNICA ELIZABETH PÁEZ PADILLA
ROMEL ALEJANDRO AULESTIA RUEDA
NANCY MARICELA GAÓN ROJAS

| Colección Matemáticas |

Dominando los números

Guía completa de matemáticas básicas

Ángel Reimundo Quilumbaquin Imbaquingo, Mónica Elizabeth Páez Padilla,
Romel Alejandro Aulestia Rueda, Nancy Maricela Gaón Rojas

RELIGACION PRESS
QUITO · 2023

Religación Press, es una iniciativa del Centro de Investigaciones CICSHAL-RELIGACIÓN.
Diseño, diagramación y portada: Religación Press.
CP 170515, Quito, Ecuador. América del Sur.
Correo electrónico: press@religacion.com
www.religacion.com

Dominando los números. Guía completa de matemáticas básicas

Mastering Numbers. A complete guide to basic mathematics
Dominando os números. Um guia completo de matemática básica

Primera Edición:	2023
Editorial:	Religación Press
Materia Dewey:	510 – Matemáticas
Clasificación Thema:	P - Matemáticas y ciencias
	PBW - Matemáticas aplicadas
BISAC:	MAT000000 MATHEMATICS / General
Público objetivo:	Profesional/Académico
Colección:	Matemáticas
Soporte:	Digital
Formato:	Epub (.epub)/PDF (.pdf)
Publicado:	2023-12-06
ISBN:	978-9942-642-46-2

Citar como (APA 7)

Quilumbaquin Imbaquingo, A.R., Páez Padilla, M.E., Aulestia Rueda, R.A., y Gaón Rojas, N.M. (2023). *Dominando los números. Guía completa de matemáticas básicas*. Religación Press. https://doi.org/10.46652/ReligacionPress.127

Patrocinio:

Instituto Superior Tecnológico Nelson Torres.

Cayambe, Ecuador. Avenida Luis Cordero, Vía a Ayora.

ISBN: 978-9942-642-46-2

9 789942 642462

https://press.religacion.com

Revisión por pares / Peer Review

Este libro fue sometido a un proceso de dictaminación por académicos externos. Por lo tanto, la investigación contenida en este libro cuenta con el aval de expertos en el tema, quienes han emitido un juicio objetivo del mismo, siguiendo criterios de índole científica para valorar la solidez académica del trabajo.

This book was reviewed by an independent external reviewers. Therefore, the research contained in this book has the endorsement of experts on the subject, who have issued an objective judgment of it, following scientific criteria to assess the academic soundness of the work.

Sobre los autores/as

Ángel Reimundo Quilumbaquin Imbaquingo
Instituto Tecnológico Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
https://orcid.org/0009-0006-4978-6421
angel.quilumbaquin@intsuperior.edu.ec
Ingeniero en Administración de Empresas por la Universidad Central del Ecuador, Con experiencia laboral sobresaliente en Produbanco y en el Gobierno Autónomo Descentralizado del Municipio de Cayambe. Experiencia como jefe de Tesorería y Coactivas. Docente de educación superior en el Instituto Tecnológico Superior Nelson Torres.

Mónica Elizabeth Páez Padilla
Instituto Tecnológico Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
https://orcid.org/0009-0006-1030-1394
monica.paez@intsuperior.edu.ec
Ingeniero en Sistemas de Información con una Maestría en Seguridad Informática.

Romel Alejandro Aulestia Rueda
Instituto Tecnológico Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
https://orcid.org/0009-0008-5702-3074
romel.aulestia@intsuperior.edu.ec
Ingeniero en Administración de Empresas y Marketing y Abogado de la República. En el ámbito laboral formó parte del personal de la Cooperativa 29 de Octubre. Docente impartiendo clases en Institutos de educación superior.

Nancy Maricela Gaón Rojas
Instituto Tecnológico Superior Nelson Torres | Cayambe | Ecuador
https://orcid.org/0009-0001-0065-9871
nancy.gaon@intsuperior.edu.ec
Ingeniera en Administración de Empresas y Marketing, actualmente se encuentra culminando una Maestría en Administración y Dirección de Empresas, ha contribuido de manera significativa en el ámbito administrativo. Docente en el Instituto Tecnológico Superior Nelson Torres.

Resumen

Este libro de matemáticas está diseñado para estudiantes de administración, cubriendo conceptos básicos y avanzados. Desde teoría de conjuntos y lógica matemática hasta derivadas y productos notables, el texto se enfoca en temas relevantes para contextos empresariales, como funciones polinomiales y exponenciales, inecuaciones y técnicas de factorización. También presenta herramientas avanzadas como matrices y el Método de Gauss-Jordán. Cada concepto se ilustra con ejemplos y gráficas, y los ejercicios refuerzan la comprensión. Este libro proporciona una base sólida en matemáticas para abordar desafíos cuantitativos en el mundo empresarial.

Palabras claves: inecuaciones, funciones polinomiales y exponenciales, Método de Gauss-Jordán, matemáticas.

Abstract

This mathematics textbook is designed for management students, covering basic and advanced concepts. From set theory and mathematical logic to derivatives and remarkable products, the text focuses on topics relevant to business contexts, such as polynomial and exponential functions, inequalities, and factoring techniques. It also presents advanced tools such as matrices and the Gauss-Jordan Method. Each concept is illustrated with examples and graphs, and exercises reinforce understanding. This book provides a solid foundation in mathematics for addressing quantitative challenges in the business world.

Keywords: inequalities, polynomial and exponential functions, Gauss-Jordan Method, mathematics.

Resumo

Este livro-texto de matemática foi projetado para estudantes de administração, abrangendo conceitos básicos e avançados. Da teoria dos conjuntos e lógica matemática às derivadas e produtos notáveis, o texto se concentra em tópicos relevantes para contextos de negócios, como funções polinomiais e exponenciais, desigualdades e técnicas de fatoração. Ele também apresenta ferramentas avançadas, como matrizes e o Método de Gauss-Jordan. Cada conceito é ilustrado com exemplos e gráficos, e os exercícios reforçam a compreensão. Este livro fornece uma base sólida em matemática para enfrentar os desafios quantitativos no mundo dos negócios.

Palavras-chave: desigualdades, funções polinomiais e exponenciais, método de Gauss-Jordan, matemática.

Contenido

| Colección Matemáticas |

Dominando los números

Guía completa de matemáticas básicas

Prólogo

El presente libro es de naturaleza teórica-práctico, en el mundo de la administración, las matemáticas son más que números y fórmulas; son la columna vertebral que sostiene las decisiones empresariales fundamentales. Este libro, dedicado a los estudiantes de administración, es una brújula confiable en el vasto océano de las matemáticas básicas, una herramienta esencial que les ayudará a navegar por las complejidades del mundo empresarial con confianza y precisión.

A medida que avanzan en sus estudios de administración, descubrirán que las matemáticas no solo son una herramienta técnica, sino también un lenguaje universal que les permitirá comunicarse efectivamente en el mundo de los negocios. Este libro no solo es un recurso educativo; es un compañero de confianza que les empoderará para enfrentar los desafíos cuantitativos del mundo laboral.

Introducción

Las matemáticas, como disciplina fundamental, juegan un papel crucial en la comprensión y descripción de los patrones, estructuras y relaciones que subyacen en el mundo que nos rodea. Desde la antigüedad hasta la era moderna, las matemáticas han sido una herramienta poderosa para resolver problemas, formular teorías y modelar fenómenos naturales y abstractos. Esta materia abarca un vasto espectro de conceptos, desde números y operaciones básicas hasta áreas avanzadas como álgebra, geometría, cálculo, estadísticas y más. A través de la lógica y el razonamiento riguroso, las matemáticas no solo nutren el pensamiento crítico, sino que también impulsan avances en la ciencia, la tecnología y la ingeniería.

En esta introducción, exploraremos la importancia y la diversidad de las matemáticas, así como su influencia en nuestra vida cotidiana y en el progreso de la sociedad en general

Las matemáticas son importantes porque contribuye a la formación y estructura lógica del pensamiento humano y al desarrollo de valores en los estudiantes.

Proporciona las herramientas fundamentales para la solución de problemas relacionados con las diferentes carreras.

Además, la Matemática es prerrequisito para el desarrollo de las diferentes asignaturas del área, que se impartirán en los siguientes semestres de las tres carreras, tales como: Microeconomía, Macroeconomía, Matemática Financiera, presupuestos, etc.

constituye, además, soporte para otras áreas académicas como: Economía, Contabilidad e Informática.

Las matemáticas tienen una amplia gama de aplicaciones en numerosas áreas de la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología, como:

Son esenciales en ciencia y física para modelar fenómenos naturales, incluyendo mecánica cuántica y relatividad. Tecnología e ingeniería se basan en matemáticas para diseñar productos y sistemas modernos. En economía, tasas, mercados y análisis financiero dependen de matemáticas. Medicina utiliza matemáticas para análisis clínicos y diagnóstico. Tecnologías de la información aseguran privacidad con matemáticas en codificación. Estadísticas guían decisiones empresariales e investigación. Arquitectura precisa, cálculos estructurales y diseño también involucran matemáticas. En educación, promueven resolución de problemas y pensamiento crítico. Investigación en todas disciplinas utiliza matemáticas para modelar y analizar. Industria usa matemáticas para planificación, optimización y eficiencia en producción.

Objetivos

Al finalizar el curso los estudiantes estarán en capacidad de resolver problemas matemáticos reales relacionados con la Administración, la Economía, las Finanzas a nivel productivo y comercial, aplicando métodos y modelos matemáticos sencillos, y lograrán trabajar en grupos, tomar decisiones, buscar alternativas de solución de ejercicios prácticos con solvencia, honestidad y rigurosidad científica.

Orientaciones básicas para el estudio

Planificación y Organización: Establecer un horario regular de estudio y asignar tiempo específico para las matemáticas. Divide los temas en sesiones de estudio para evitar agotamiento.

Comprensión de Fundamentos: Asegúrate de comprender los conceptos fundamentales antes de avanzar. Si un concepto te resulta confuso, busca recursos adicionales o ayuda para aclararlo.

Práctica Regular: La práctica constante es esencial. Realiza ejercicios variados para fortalecer tus habilidades en diferentes áreas matemáticas.

Resolución de Problemas: Enfócate en resolver problemas en lugar de memorizar fórmulas. La resolución de problemas agudiza el pensamiento analítico.

Construcción sobre Conceptos Previos: Las matemáticas son acumulativas. Asegúrate de entender conceptos anteriores antes de avanzar a temas más complejos.

Uso de Recursos: Utiliza libros de texto, recursos en línea, videos y aplicaciones interactivas para diversificar tus fuentes de aprendizaje.

Toma de Notas: Anota puntos clave, ejemplos y pasos de resolución mientras estudias. Esto te ayudará a repasar más tarde.

Colaboración y Consulta: Trabaja con compañeros de clase o busca ayuda de profesores y tutores cuando enfrentes dificultades.

Enfoque en Concepto, no en Respuestas: Busca entender por qué se aplican ciertas fórmulas o conceptos en lugar de simplemente obtener la respuesta correcta.

Prueba y Error: Aprende de tus errores. Revisa tus respuestas incorrectas para identificar dónde cometiste errores y corregirlos.

Aplicación Práctica: Busca ejemplos de cómo las matemáticas se aplican en situaciones reales y en otras disciplinas.

Persistencia: Las matemáticas pueden ser desafiantes, pero la perseverancia es clave. No te rindas ante la dificultad.

Competencias de la carrera o asignatura

Al finalizar el estudio de este texto está en capacidad de resolver problemas sobre situaciones relacionadas con la Administración, la Economía, las Finanzas a nivel productivo y creativo, aplicando métodos y modelos matemáticos sencillos. Trabajar en grupos, tomar decisiones, buscar las mejores alternativas de solución de problemas, con solvencia, honestidad y rigurosidad científica.

Planificación para el trabajo del alumno

En la planificación para el trabajo del alumno, se deben incluir los pasos y recursos necesarios para alcanzarlos. Esta planificación también debe incluir una lista de tareas específicas y un calendario para cumplirlas, una lista de los materiales o recursos necesarios para completar el trabajo. Finalmente, la planificación debe incluir un plan de evaluación para medir el éxito del trabajo del alumno.

Capítulo 1

Conjuntos, funciones matemáticas, números reales y lógica matemática

Se desarrollan los capítulos de acuerdo con los contenidos de la dosificación, cada capítulo abarca los contenidos de 4 semanas de la dosificación.

1.1. Conjuntos

Un conjunto se refiere a cualquier agrupación, colección o reunión de elementos (pueden ser objetos, animales, personas o números) claramente identificados que satisfacen una propiedad específica. Los componentes de dicho conjunto son conocidos como "elementos".

Ejemplos de conjunto:

- El conjunto de colores de la bandera de Ecuador.
- La colección de letras de la palabra "murciélago".
- El conjunto formado por los dígitos del número 1234567890.
- La agrupación de números naturales menores que 15
- La agrupación de números primos entre 0 y 10.

Notación de conjuntos (lenguaje de conjuntos)

La notación típica para representar conjuntos implica el uso de letras mayúsculas del alfabeto (como A, B, C, D, ...) para denotar los conjuntos en sí, y letras minúsculas (como a, b, c, ..., a1, a2, ..., an, bi, ...) para referirse a sus elementos, a menos que esos elementos sean conjuntos en sí mismos. Sin embargo, también es posible utilizar números, letras griegas u otras designaciones. Además, para indicar los elementos que pertenecen a un conjunto, se suelen encerrar entre llaves ({ }) y separarlos mediante comas. También se emplean símbolos específicos, como:

$\in$ (pertenece):

a $\in$ A, y se lee: "a pertenece al conjunto A"

$\notin$ (no pertenece):

b $\notin$ A, y se lee: "b no pertenece al conjunto A"

$\forall$ Para todo (cuantificador universal)

$\exists$ existe (cuantificador existencial)

/ Tal que

= igual que

$\neq$ Diferente

(,) Paréntesis

Algunos símbolos lógicos como: (disyunción), $\rightarrow$ (implicación),

$\wedge$ (conjunción), $\vee$ *(disyunci*ón), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia), etc.

Definición o determinación de conjuntos

Definir un conjunto implica señalar cuáles son sus componentes, y un conjunto se considera bien definido cuando se conocen de manera inequívoca los elementos que pertenecen a él y los que no. Si no podemos determinar claramente cuáles son los elementos, entonces no estamos tratando con un conjunto. Por ejemplo, el grupo de estudiantes que no comprenden a su profesor no constituiría un conjunto.

Existen dos maneras de definir o describir un conjunto: la definición por extensión y la definición por comprensión. Un conjunto se define por extensión cuando se enumeran todos y cada uno de sus elementos. En cambio, un conjunto se define por comprensión cuando se establece una propiedad o atributo común que caracteriza a todos los elementos del conjunto, de modo que solo se aplican a ellos sin ambigüedad. Ejemplos de conjuntos por extensión:

A = {a1, a2, a3,...}

B = {a, e, i, o, u}

C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}

D = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio}

E = {Jesús, María, José}

F = $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

T = {Argentina, Colombia, Panamá, Ecuador, Perú, Bolivia}

Ejemplos de conjuntos por comprensión:

A = $\{ai \mid i \in N\}$

B = {Las vocales}

C = $\{x \in N / x$ es número primo, $0 < x \leq 25\}$

D = {x / x primer semestre del año}

E = $\{x / x \in$ sagrada familia$\}$

F = $\{x \in R / x2–5 = 3\}$

G = $\{x \in Q /$ x tiene denominador impar$\}$

Tipos de conjuntos

Se pueden identificar los siguientes tipos:

• Conjuntos finitos: Son aquellos en los cuales es factible contar o listar todos sus componentes de manera completa.

Ejemplos:

A = {Los doce meses del año};

B = {Los números naturales que son menores que 15}.

Conjuntos infinitos: Se refieren a aquellos en los cuales no es posible enumerar exhaustivamente todos sus elementos. La tarea de definir conjuntos infinitos en su totalidad mediante una lista exhaustiva no es práctica, por lo tanto, se suelen abordar principalmente a través de definiciones por comprensión basadas en propiedades comunes. Ejemplos:

P = {$x \in N$/ x es un número primo}

Los conjuntos numéricos:

N conjunto de números naturales: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9...}.

Z conjunto de números enteros: Z = {…, -3, -2, -1, 0. 1, 2, 3,…}.

Q conjunto de números racionales o fraccionarios.

R conjunto de números reales.

Conjuntos notables:

Conjuntos unitarios: son aquellos que consisten en un único elemento.

Ejemplos:

L = {x/x es un satélite de la Tierra}; D = {x/x es el día de Navidad}.

Un conjunto vacío: es aquel que no tiene ningún elemento, es decir, carece de componentes. Se representa con la letra griega fi (φ) o mediante llaves vacías { }.

Ejemplos: $E = \{x \in R / x \neq x\} = \varphi = \{\ \}$

$F = \{x \in N / x + 1 = 0\} = \varphi = \{ \}$

Æ: el conjunto vacío, no contiene ningún elemento.

El conjunto universal o conjunto referencial: está compuesto por todos los conjuntos dentro de un sistema dado o en el contexto de un problema, y se denota como U.

Ejemplo: Si el problema se limita al conjunto de los números reales: $U = R$.

Relaciones entre conjuntos

Subconjuntos: que resultan de la inclusión, se refieren a la relación entre dos conjuntos, A y B. Un conjunto A se considera un subconjunto o parte de B, o está incluido en B, cuando todos los elementos de A también están en B. Esta relación se denota como $A \subset B$, y la operación asociada se llama inclusión. Cuando dos conjuntos A y B no son subconjuntos el uno del otro, se representa como $A \not\subset B$.

En realidad, a menos que dos conjuntos sean idénticos ($A = B$), si $A \subset B$, por lo general, B no es un subconjunto de A (esto es una propiedad antisimétrica). Esto se llama inclusión estricta. Cuando existe la posibilidad de que A sea igual a B, se denota como $A \subseteq B$. La relación de inclusión cumple con las siguientes propiedades:

- Propiedad reflexiva: $A \subset A$
- Propiedad transitiva: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- El conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos: $\varphi \subset A$

Conjuntos iguales: se refiere a dos conjuntos A y B que tienen exactamente los mismos elementos. $A = B$ si y solo si cada elemento de A está contenido en B y cada elemento de B está contenido en A. En otras palabras, $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Por ejemplo, si A = {x ∈ N/ x es un número par} y B = {x ∈ N/ x es un múltiplo de 2}, entonces A = B.

Conjuntos diferentes: por otro lado, son dos conjuntos (A ≠ B) que tienen al menos un elemento que difiere entre ellos.

Ejemplo: Sean C = {x ∈ N/ 3 < x < 8} y D = {x ∈ N/ 1 ≤ x < 7}, entonces C ≠ D.

Conjuntos disjuntos: se refieren a dos conjuntos que no comparten ningún elemento en común.

Por ejemplo, si E = {las vocales} y F = {las consonantes}, entonces E y F son disjuntos.

Conjuntos solapados: se refieren a dos conjuntos que tienen al menos un elemento en común.

Por ejemplo, si C = {x ∈ N/ 3 < x < 8} y D = {x ∈ N/ 1 ≤ x < 7}, son diferentes (C ≠ D) pero solapados porque tienen algunos elementos en común, en este caso, {4, 5, 6}.

Ejercicios.

Defina por comprensión los siguientes conjuntos:

1. A = {los puntos cardinales}.

2. B = {x ∈ N/ 3 < x ≤ 10}.

3. C = {x ∈ N/ x es múltiplo de 3}.

4. D = {x ∈ Z/ x2 – 6 = 15}.

Defina por extensión los siguientes conjuntos:

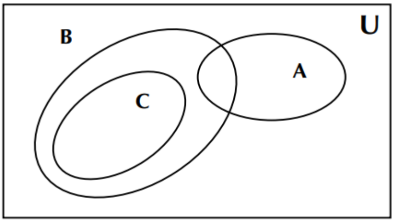
1. A = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}.

2. B = {5, 10, 15, 20, 25}.

3. C = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Diagramas de Venn

Las ilustraciones gráficas que representan conjuntos se conocen como diagramas de Venn. En relación a esto, los conjuntos universales o de referencia (U) generalmente se representan mediante un rectángulo, mientras que los conjuntos se representan con óvalos o elipses cerradas, es decir, áreas delimitadas.

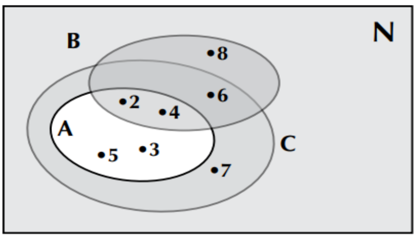


En el caso $C \subset B$.

(Corral, 2014d)

Ejemplo:

Sean los conjuntos U = N; A = {x/ $1 < x < 6$}; B = {x/x es par $\wedge$ $x \leq 8$} y C = {x/ $2 \leq x < 8$}.



Son conjuntos finitos.
Definidos por extensión:

A = {2, 3, 4, 5}.
B = {2, 4, 6, 8}.
C = {2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Puede observarse que:
$A \subset C$; B y C; B y A
son solapados.

Operaciones con conjuntos

Las operaciones realizadas en conjuntos son métodos particulares para fusionar conjuntos existentes con el propósito de crear conjuntos adicionales, lo que implica la creación de conjuntos nuevos a partir de conjuntos previamente establecidos. En esta sección vamos a estudiar las siguientes operaciones:

Intersección.

Unión.

Diferencia.

Diferencia simétrica.

Complemento o complementación.

Producto cartesiano.

1.2. Funciones matemáticas

Función

Definición

Una función se define como una norma que asigna un solo resultado a cada valor de entrada. El conjunto de valores de entrada en los que esta norma se aplica se llama el dominio de la función, mientras que el conjunto de todos los resultados se conoce como el rango.

La variable que representa los valores de entrada en una función se denomina variable independiente, ya que su valor no se basa en otro. Por otro lado, la variable que representa los resultados se conoce como variable dependiente, ya que su valor está determinado por la variable independiente. Podemos afirmar que la variable dependiente es una expresión de la variable independiente, lo que implica que la salida está relacionada con la entrada según la norma establecida. En resumen, el resultado de la función está influenciado por la entrada.

Como otro ejemplo, la ecuación (o fórmula):

$y = x + 2$

Define "a" y "como" una función de "x". La ecuación establece la regla de "añadir 2 a x". Esta regla asigna un valor de salida único, que es "x + 2", a cada valor de entrada "x". Si "x" es igual a 1, entonces "y" es igual a 3; si "x" es igual a -4, entonces "y" es igual a -2. En este contexto, "x" actúa como la variable independiente, mientras que "y" es la variable dependiente.

> $f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.
>
> $$\underbrace{f(\overset{\overset{\text{entrada}}{\downarrow}}{x})}_{\substack{\uparrow \\ \text{salida}}}$$

Así el resultado f(x) es lo mismo que y. Pero como y = x + 2, podemos escribir y = f(x) = x + 2 o simplemente.

$f(x) = x + 2$

Por ejemplo, para encontrar f(3), que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en f(x) = x + 2:

$f(3) = 3 + 2 = 5$

Del mismo modo,

$f(8) = 8 + 2 = 10$,

$f(-4) = -4 + 2 = -2$

Dominio y rango de una función

Dominio de una Función:

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores de entrada (o valores de la variable independiente) para los cuales la función está definida y produce un resultado real.

En otras palabras, el dominio es el conjunto de valores de "x" para los cuales la función "f(x)" tiene sentido matemáticamente y no conduce a divisiones por cero o a valores indefinidos.

El dominio puede ser un conjunto de números reales, un conjunto de números enteros, o un conjunto de valores específicos, dependiendo de la función y las restricciones que pueda tener.

Rango de una Función:

El rango de una función es el conjunto de todos los valores de salida (o valores de la variable dependiente) que la función puede tomar después de aplicar la regla o la relación establecida por la función.

En otras palabras, el rango es el conjunto de valores de "f(x)" correspondientes a los valores en el dominio.

El rango puede ser un conjunto de números reales, un conjunto de números enteros, o un conjunto de valores específicos, dependiendo de la función y cómo se defina.

Ejemplo:

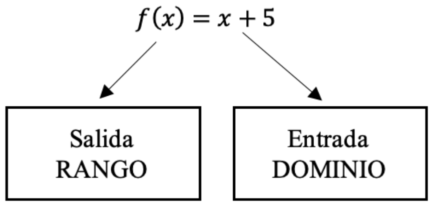
Sea la función: $y=f(x)=\mathrm{x}+5$

Se lee y es una función de x.

En esta situación, el dominio se refiere al conjunto de todos los posibles valores que la variable "x" pueda tomar, mientras que el rango se refiere al conjunto que abarca todos los valores posibles para la variable "y".

Esta función también se escribe así: $y = f(x)$

Por lo tanto:



Funciones especiales

Función constante

Tomemos la función h(x) = 2 como ejemplo. El dominio de h abarca todos los números reales, y todos los valores que produce la función son iguales a 2. Para ilustrar esto, podemos observar que h(10) = 2, h(-387) = 2 y h(x + 3) = 2.

Este tipo de función se conoce como una función constante, ya que todos sus valores funcionales son constantes e iguales. De manera más general, podemos definir una función constante como aquella que se expresa en la forma h(x) = c, donde "c" es una constante.

Es importante destacar que una función constante se encuentra dentro de una categoría más amplia de funciones conocidas como funciones polinómicas. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Funciones polinomiales

Estas funciones se componen de términos que siguen la estructura , donde "a" e representa una constante y "n" es un exponente entero no negativo.

f(x) = 3x2–8x + 9

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ Es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal 1.

$b)\ g(x) = \frac{2x}{3}$ Es una función lineal con coeficiente principal 2/3

$$c)\ f(x) = \frac{2}{x^3}\ no\ es\ una\ función\ polinomial.\ Puesto\ que\ f(x) = 2x - 3\ y\ el\ exponente$$

Cuando "x" no es un número entero no negativo, esta función no se presenta en la típica forma característica de las funciones polinómicas.

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama función racional.

Funciones racionales

Son divisiones de polinomios, es decir, representaciones que tienen el formato p(x)/q(x), donde "p(x)" y "q(x)" son polinomios.

$a)\ f(x) = \frac{x^2-6x}{x+5}$ Es una función racional, ya que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Note que esta función fraccional no tiene una definición válida cuando x es igual a -5

$g(x) = 2x + 3$ es una función racional, ya que $2x + 3 = \frac{2x+3}{1}$ De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

Función valor absoluto

La función f(x) = |x| se conoce como la función de valor absoluto. Recuerde que el valor absoluto o magnitud de un número real x se representa como |x| y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

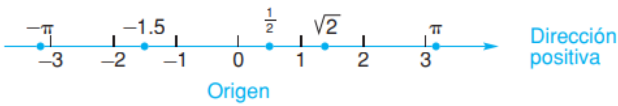
Por eso el dominio de f son todos los números reales. Algunos valores funcionales son:

$$\begin{aligned} f(16) &= |16| = 16, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= |-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3}, \\ f(0) &= |0| = 0. \end{aligned}$$

1.3. Números reales

Este conjunto está compuesto tanto por números racionales como por números irracionales; por tanto contiene a todos los números de la recta numérica.

Los números reales pueden ser visualizados mediante puntos dispuestos en una línea recta. Inicialmente, se elige un punto en esta línea para representar el valor cero, al que se le denomina "origen". Luego, se establece una medida estándar de distancia conocida como "unidad de distancia" y se procede a marcar puntos sucesivamente en ambas direcciones, hacia la derecha y hacia la izquierda del origen. A cada punto en la recta se le asigna un valor numérico con signo, llamado "distancia dirigida", que depende de la ubicación del punto en relación con el origen. Se considera que las posiciones a la derecha del origen son positivas (+), mientras que las ubicadas a la izquierda son negativas (-).



Cada punto ubicado en la recta está asociado con un solo número real, y a su vez, cada número real se relaciona con un punto único en la recta. Por esta razón, afirmamos que existe una relación de uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales. Esta línea es comúnmente conocida como la línea de coordenadas o línea de números reales.

Propiedades de los números reales

1. Propiedad transitiva de la igualdad

Si a es igual a b y b es igual a c, entonces a es igual a c.

En otras palabras, cuando dos números son iguales a un tercer número, también son iguales entre sí.

Por ejemplo, si $x = y$, y $y = 7$, entonces x es igual a 7.

2. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación

Para la suma, $a + b$ es igual a $b + a$, y para la multiplicación, $ab = ba$.

Esto implica que se pueden sumar o multiplicar dos números en cualquier orden.

Por ejemplo, $3 + 4$ es igual a $4 + 3$, y $7 * (-4) = (-4) * 7$.

3. Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación

$a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$.

Esto significa que los números pueden agruparse en diferentes formas al realizar sumas o multiplicaciones, y el resultado seguirá siendo el mismo.

Por ejemplo, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$, en ambos casos, la suma es igual a 9. Del mismo modo, $2x + (x + y) = (2x + x) + y$.

4. Propiedades del inverso

Para cada número real a, existe un número real único que se representa como -a, de tal manera que,

$a + (-a) = 0$.

El número–a es llamado el inverso aditivo o negativo de a.

5. Propiedades distributivas

$a(b + c) = ab + ac$ y $b + c)a = ba + ca$

Por ejemplo, $2(3 + 5) = 2(8) = 16$ aunque podemos escribir

$2(3 + 5) = 2(3) + 2(5) = 6 + 10 = 16$

1.3.2. Clasificación de los números reales

Los números reales se pueden clasificar en diferentes subconjuntos, algunos de los cuales son los siguientes:

Números Naturales (N): El conjunto de números naturales incluye todos los números enteros positivos, comenzando desde 1.

Es decir, N = {1, 2, 3, 4, ...}.

Números Enteros (Z): El conjunto de números enteros incluye todos los números naturales junto con sus negativos y el cero.

Es decir, Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

Números Racionales (Q): Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como cocientes de dos enteros, donde el denominador no es cero. Esto incluye a todos los números enteros y fracciones.

Por ejemplo, 1/2, -3/4, 5, -2, etc.

Números Irracionales: Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracciones de enteros y tienen expansiones decimales no periódicas. Ejemplos conocidos son la raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$), π (pi), e (número de Euler), etc.

Números Reales (R): El conjunto de números reales incluye tanto los números racionales como los irracionales. En otras palabras, todos los números que se pueden ubicar en la recta numérica se consideran números reales.

Números Trascendentes: Los números trascendentes son una subclase de los números irracionales. Son números reales que no son soluciones de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Por ejemplo, π y e son números trascendentes.

Números Algebraicos: Los números algebraicos son aquellos que son soluciones de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros. Esto incluye tanto a los números racionales como a algunos números irracionales, como las raíces de polinomios con coeficientes enteros.

Operaciones con números reales

Propiedad Ejemplo(s)

Propiedad	Ejemplo(s)
a - b = a + (-b).	2 - 7 = 2 + (-7) = -5
a - (-b) = a + b	2 - (-7) = 2 + 7 = 9.
-a = (-1)(a)	-7 = (-1)(7)
a(b + c) = ab + ac	6(7 + 2) = 6 . 7 + 6 . 2 = 54
a(b - c) = ab – ac	6(7 - 2) = 6 . 7 - 6 . 2 = 30
-(a + b) = -a - b.	-(7 + 2) = -7 - 2 = -9.
-(a - b) = -a + b	-(2 - 7) = -2 + 7 = 5
-(-a) = a	-(-2) = 2.
a(0) = 0	2(0) = 0.
(-a)(b) = -(ab) = a(-b).	-2)(7) = -(2 7) = 2(-7) = -14

1.4. Lógica matemática

La lógica y el lenguaje formal

La lógica se enfoca en el examen del proceso de razonamiento y desempeña un papel crucial en la identificación de la validez de un argumento. Proporciona una perspectiva sobre un planteamiento o proposición. También la lógica se define como "...la disciplina que se dedica a investigar los métodos y principios utilizados para discernir entre razonamientos correctos (o válidos) y razonamientos incorrectos (o no válidos). Este estudio se lleva a cabo mediante el empleo de una notación artificial (simbólica) y un proceso deductivo riguroso".

La lógica, en esencia, implica examinar el proceso de razonamiento, donde "razonar" se refiere a la obtención de afirmaciones (denominadas conclusiones) a partir de otras afirmaciones (llamadas premisas), utilizando criterios apropiados que garanticen que si las premisas son verdaderas, entonces las conclusiones también deben ser necesariamente verdaderas.

Por lo tanto, la lógica se encarga de analizar los métodos y principios utilizados para distinguir entre razonamientos correctos (o válidos) y razonamientos incorrectos (o no válidos). Esta disciplina se vale de una notación artificial, que incluye símbolos y signos, junto con un enfoque deductivo riguroso. Emplea símbolos alfabéticos y otros específicos, como letras y números, para expresar relaciones, así como signos como paréntesis, comas y puntos, entre otros.

El propósito de los estudios lógicos radica en desarrollar una estructura mental que facilite la comprensión del razonamiento a través del análisis del lenguaje. En última instancia, su objetivo principal es distinguir entre razonamientos correctos y razonamientos incorrectos, es decir, entre argumentos válidos e inválidos.

El lenguaje

El lenguaje se utiliza como una herramienta para expresar y comunicar ideas. Se enfatiza que el lenguaje desempeña un papel fundamental en la interacción entre seres humanos, ya que "permite representar nuestros pensamientos y emociones" y se compone de una variedad de signos tanto hablados como escritos. Estos signos, junto con la relación entre sus significados y representaciones físicas, facilitan la expresión y la comunicación humanas. Además, se describe el lenguaje como un sistema orgánico de símbolos y signos.

El lenguaje se compone de un conjunto de palabras que están formadas por secuencias de símbolos, como letras del alfabeto y números, así como signos de puntuación como guiones y comas, entre otros. Cada idioma consta de una colección finita de estos símbolos y signos que se utilizan para crear palabras y, en algunos casos, secuencias numéricas (0, 1, 2, ...). Además, se destaca que el lenguaje es la habilidad humana de comunicarse a través de diversos idiomas. En resumen, las lenguas son sistemas más o menos complejos que vinculan significados y pensamientos con manifestaciones simbólicas tanto en forma oral como escrita.

Lenguaje natural y lenguaje formal

Existen dos categorías fundamentales de lenguaje: los lenguajes naturales y los lenguajes artificiales o formales. Los lenguajes naturales se emplean en situaciones cotidianas e informales de comunicación, mientras que los lenguajes artificiales se utilizan en contextos académicos, científicos, legales y otros de naturaleza formal. Uno de estos lenguajes artificiales es el lenguaje lógico-matemático, que facilita la transmisión de información y conocimiento de manera precisa y sin ambigüedades.

Lenguaje natural

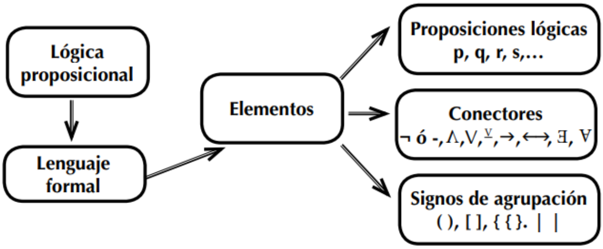
El lenguaje natural u ordinario es la lengua que normalmente utilizan las personas en una comunidad para comunicarse entre sí. Incluye lenguas vivas como el castellano, el inglés, el francés, el chino, entre otros, así como lenguas muertas como el latín y el arameo. Estos lenguajes se desarrollaron sin seguir ninguna teoría específica en un principio y, posteriormente, se establecieron reglas y normas gramaticales.

Lenguaje formal

El lenguaje formal es una creación artificial diseñada especialmente para lograr precisión, eficacia y operatividad. La lógica, como disciplina, posee su propio lenguaje preciso. Este lenguaje utiliza un vocabulario compuesto por símbolos y signos perfectamente definidos y claros, eliminando ambigüedades y connotaciones que son características del lenguaje natural. Además del lenguaje lógico, existen otros ejemplos de lenguajes formales, como el lenguaje informático, los símbolos utilizados en química, el lenguaje matemático y otros lenguajes técnicos.

El lenguaje de la lógica está diseñado específicamente para representar las formas más avanzadas de razonamiento y se compone de:

Gráfico. Elementos del lenguaje formal



Nota: Si una oración no posee un valor de verdad, lo que significa que no se puede determinar si es verdadera o falsa, no se considera una proposición y, por lo tanto, no resulta relevante para la lógica. En consecuencia, podemos afirmar que la lógica se concentra exclusivamente en el lenguaje que tiene fines comunicativos e informativos.

El lenguaje formal o artificial utilizado en la lógica, conocido como lenguaje formal de primer orden, se compone de una serie de símbolos y signos que se organizan en categorías y cumplen con las siguientes características:

Variables: Existen en cantidad infinita (a, b, c,..., x, y,…; a1, a2,…, ai;…, x1, x2,…, xj,…).

Constantes: Pueden ser desde ninguna hasta un número infinito de constantes (0, 1, 2,…, n,…).

Relatores: Cada relator debe estar asociado con un número natural distinto y no nulo (denominado rango). Cada relator monádico debe tener un índice diferente y al menos un relator diádico R0 2 (denominado igualador o =). Estos relatores generan afirmaciones. Ejemplos incluyen H (hombre), A (amigos), unión (∪), pertenece (∈), subconjunto (⊂), entre otros.

Funtores: Son signos que, cuando se combinan con nombres de objetos, nombran otro objeto. Cada funtor está vinculado a un rango e índice en las mismas condiciones que los relatores, pudiendo ser monádicos o diádicos. Ejemplos incluyen p1, p2,…pi; ft; yi, etc.

Descriptor: Puede estar presente o ausente, y si existe, se expresa como “tal que” (/).

Conectores lógicos: Incluyen ∧ (y, conjunción), ∨ (o, disyuntor o disyunción), y otros. Además:

- Negador (negación): Representado por–o ¬.
- Conjunción (coyuntor, conjunción): ∧ (y).
- Disyunción (disyuntor, disyunción): ∨ (inclusiva, o); ∨ (exclusiva, o... o...).
- Implicador (implicación, condicional): → (entonces, implica).
- Coimplicador (bicondicional, coimplicación): ↔ (si y solo si, solamente si).
- Cuantificador universal o generalizador: ∀ (para todo), utilizado con las variables.
- Cuantificador existencial: ∃ (existe), utilizado con las variables

Ejercicios resueltos

Identifica las expresiones como oraciones informativas o enunciativas (enunciados), expresivas (exclamativas), directivas (interrogativas, desiderativas o imperativas):

1. En la mitad del camino de la vida.
2. ¡Por favor, no fumar!
3. ¿Vienes a la reunión?
4. Las naciones desarrolladas, que representan solo el 10% de la población global, utilizan el 73% de la energía consumida en la Tierra.
5. $13 + 16 = 29$
6. Newton y Goethe formularon teorías de los colores y ambos son del mismo pais.
7. Simón Bolívar fue el libertador de cinco países.
8. Se agradece que sean puntuales a la clase.
9. π es un número fraccionario mayor que 2.
10. Un posible resultado de aumentar el salario mínimo y disminuir las horas de trabajo es que la inflación pueda experimentar un aumento durante el mes de diciembre.
11. Sócrates es un hombre y algunos hombres son filósofos; luego, Sócrates es filósofo.
12. Todos los hombres en la adolescencia van a discotecas y Andrés es adolescente, por tanto, Andrés va a discotecas.
13. Nelson Rolihlahla Mandela y Frederik Willem de Klerk obtuvieron el Premio Nobel de la Paz en 1993.
14. $20 – 24 = ?$
15. Juan fue a París el año pasado.
16. Esdrújula es esdrújula.

17. Cuando miro el amanecer me inspiro.
18. Si todos los caminos llevan a Roma, entonces la autopista Valencia-Caracas me llevará a Roma.
19. Yadira estudió en el instituto Nelson Torres.
20. Extraño la sierra.

Conclusión

- Los conjuntos son una parte fundamental de las matemáticas que nos permiten organizar y agrupar elementos de manera lógica y abstracta. A través de conceptos como la intersección, la unión, y la diferencia, los conjuntos nos ofrecen herramientas poderosas para analizar y resolver una variedad de problemas matemáticos y aplicaciones en diversos campos. Su comprensión y uso adecuado son esenciales para desarrollar habilidades matemáticas sólidas y aplicarlas en situaciones prácticas.

- Las funciones matemáticas son una parte esencial de las matemáticas y tienen una amplia aplicación en diversas áreas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la biología. Son herramientas poderosas para describir relaciones y transformaciones entre variables, lo que permite modelar y resolver una variedad de problemas complejos. La comprensión de las funciones y sus propiedades es crucial para el progreso en el ámbito académico y en la resolución de problemas en la vida cotidiana, lo que subraya su importancia en el mundo de las matemáticas y más allá.

- Los números reales en matemáticas son un conjunto infinito que incluye números racionales e irracionales. Son cerrados bajo las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Los números reales se representan en la recta numérica y se dividen en números positivos y negativos, con el cero como punto de referencia. También se pueden categorizar como números enteros y fraccionarios. Los números reales cumplen propiedades importantes como la propiedad conmutativa y la propiedad distributiva, lo que los hace fundamentales en todas las ramas de las matemáticas y aplicaciones en la vida cotidiana.

- La lógica matemática es un campo de las matemáticas que se ocupa del razonamiento válido y las estructuras abstractas. Se basa en proposiciones y conectores lógicos para construir expresiones lógicas. La teoría de conjuntos es fundamental en la lógica matemática. Se utiliza para demostrar la validez de argumentos y para establecer relaciones entre proposiciones. La lógica proposicional se centra en proposiciones simples, mientras que la lógica de primer orden incluye cuantificadores para expresar propiedades sobre conjuntos. La lógica matemática es esencial en la programación, la inteligencia artificial y la fundamentación de las matemáticas.

Autoevaluación

Capítulo 2

Valor de verdad, operadores lógicos, tablas de verdad, proposiciones y expresiones algebraicas

2.1 Valor de verdad

Lógica proposicional

La lógica proposicional, también conocida como lógica de enunciados, se dedica al estudio de los razonamientos utilizando una forma básica del lenguaje. De esta manera, permite asignar un valor de verdad (verdadero o falso) a enunciados completos sin descomponer las palabras individualmente. No obstante, para determinar la verdad de una afirmación compleja, se evalúan los valores de verdad asignados a las proposiciones simples que la componen. La lógica proposicional (LP) incluye los siguientes elementos:

- Proposiciones lógicas y variables proposicionales.
- Conectivos, conectores u operadores lógicos.
- Signos de agrupación.

Proposiciones lógicas

Una proposición se refiere a una declaración simple, es decir, una oración que expresa una afirmación o declaración y puede tener un único valor de verdad, que puede ser verdadero (V) o falso (F), pero nunca ambos simultáneamente.

Para que una expresión en lenguaje comunicativo sea considerada una proposición lógica, debe cumplir dos condiciones: ser una oración afirmativa o declarativa y tener un valor de verdad específico, es decir, ser verdadera o falsa. En resumen, las proposiciones lógicas son enunciados expresados en lenguaje común que pueden recibir una atribución de veracidad (V) o falsedad (F), pero no ambos. Algunos ejemplos de proposiciones lógicas incluyen:

- Albert Einstein era un científico.
- Simón Bolívar nació en Venezuela.

- Las ballenas son mamíferos.
- 4 x 5 = 20.
- 7 + 8 = 20.
- El día tiene 24 minutos.
- La semana consta de 5 días.
- Carlos no estudia agronomía.
- Martha era periodista.

Es importante ejercer precaución al evaluar una expresión en lenguaje, ya que algunas de ellas no califican como proposiciones lógicas, debido a que carecen de un criterio de verdad que permita determinar si son verdaderas o falsas. Ejemplos:

- ¿Dónde nos vemos?
- ¡Qué noche tan bonita!
- Cállense, para poder escuchar.
- Los hombres son niños grandes.
- Las mujeres son frágiles como las rosas.

Ejercicios propuestos

Indique si la oración es o no una proposición Oración.

1. 1. Los peces tienen escamas.
2. 2. ¿Cuándo vuelves?
3. 3. ¡Oh, qué lástima!
4. 4. Vuelvo más tarde.

5. 5. Un triángulo tiene 3 lados.
6. 6. ¡Qué bello paisaje!
7. 7. ¿Qué hora es?
8. 8. La lógica es una ciencia.
9. 9. Cuando el río suena piedras trae.
10. 10. ¿Qué pasó el 19 de abril?

2.1.1 Operadores lógicos

Conectivos u operadores lógicos

Los conectivos lógicos, también llamados operadores lógicos, son términos en el lenguaje formal de la lógica que se utilizan para unir o combinar proposiciones simples. Estos conectores no solo establecen conexiones entre proposiciones, sino que también realizan operaciones específicas entre ellas, con la excepción de "no", que simplemente niega una proposición sin conectarla a otra.

Estos operadores lógicos se dividen en dos categorías: monádicos o unitarios, con "NO" como ejemplo principal, y diádicos o binarios, que afectan a dos variables y pueden operar en ambas direcciones, como la conjunción, disyunción inclusiva y exclusiva, condicional y bicondicional (García Zárate, 2003), ver cuadro.

Operador, conector o conectivo lógico	Símbolo o signo metamatemático	Se lee	Tipo de conector
Negación (negador)	¬ – ~	No, Ningún (o, a), Nunca, Falso, otros negadores	Monádico o unitario
Conjunción (coyuntor)	∧	Y, pero, e, otros que indiquen conjunción	Diádico o binario
Disyunción inclusiva (disyuntor)	∨	O, u, y/o, no… o no (negación alterna), otros inclusores	Diádico o binario
Disyunción exclusiva	∨	o… o, o… u, otro disyuntos exclusivo	Diádico o binario
Condicional (implicador)	→	Si, … entonces, es condición necesaria, otras expresiones condicionales o implicadoras	Diádico o binario
Bicondicional	↔	Si y solamente si; es necesario y suficiente, otras expresiones de bicondicionales	Diádico o binario

Análisis de los conectores, conectivos u operadores lógicos

Negación o negador (no) ¬ ó–ó ~

La facultad de la negación radica en modificar la naturaleza de un juicio, es decir, cambia el valor de verdad de una proposición. La palabra "no" desempeña el papel de negar una declaración y puede sustituirse por otras expresiones como "es falso que," "ningún (o, a)," "no es cierto que," "no es el caso que," "no ocurre que," "nunca," entre otras, que cumplen la misma función negativa. Estas expresiones se pueden representar mediante el conector ¬, el guion (-) o el símbolo ~, los cuales preceden a la variable proposicional. Si consideramos p como una variable proposicional, entonces -p (¬p o ~p) equivale a la afirmación "no p" y se refiere a una proposición negativa o la negación de p. Cuando p es verdadero, -p (no p) es falso, y viceversa. En resumen, la negación implica la negación de una declaración.

Ejemplos:

- No es cierto que Ecuador sea un país Africano:–p ó ¬p ó ~p
- No existen los alienígena:–q ó ¬q ó ~q
- Ninguna mujer es pequeña:–r ó ¬r ó ~r
- No es el caso que Juan vaya a EEUU este año:–s ó ¬s ó ~s
- Hoy no voy al trabajo: -t ó ¬t ó ~t

Conjunción o coyuntor (y) ∧

La conjunción se suele expresar mediante el término "y" y su función principal es unir dos proposiciones simples. Se la considera un conector elemental sin implicaciones problemáticas. En notación lógica, se representa con el símbolo ∧, que se coloca entre dos variables proposicionales. Puede ser equivalente a expresiones como "además," "también," "pero," "aunque," "sin embargo," "así mismo," "mientras," "mientras que," y "ni...ni" (que representa una negación conjunta).

Ejemplos:

- Cecilia llegó a Quito mientras que Carmen se quedó en Guayaquil. p ∧ q
- Ni Ángel ni Vanessa estudian derecho. -r ∧ -s
- Laura usa lentes de contacto, pero también lentes convencionales. q ∧ r
- Luis estudia matemática y Francisco es médico. s ∧ t
- Marlon compró un pantalón, además de un par de guantes. m ∧ n

Disyunción inclusiva o alternativa (o) ∨

La disyunción inclusiva se relaciona con el conector "o" y señala la existencia de una relación de alternancia entre dos proposiciones simples, lo que significa que si una es verdadera, la otra no necesariamente lo es. Esto implica la posibilidad de que ambas acciones o proposiciones se cumplan simultáneamente. En lenguaje lógico, se representa mediante el símbolo ∨ entre dos variables proposicionales. Expresiones equivalentes incluyen "u," "y/o," "no... o no" (que implica negación alternativa), "éste o aquél," y "este o este." A las proposiciones que componen una disyunción se les denomina disyuntivas, y también se conoce como suma booleana.

Ejemplos:

- Jenny viajará este mes a Cuenca u otra localidad. $p \vee q$
- Irá a tu trabajo Carlos o Juan. $r \vee s$
- Yo tomaré agua o jugo. $m \vee n$
- Alex se vestirá de negro o de blanco. $t \vee u$
- Hoy Jeaneth cocinará pollo o res. $v \vee w$

Condicional (si... entonces) →

El conector condicional se formula mediante la expresión compuesta "si... entonces" (que a veces puede reemplazarse por una coma) o se puede expresar de manera equivalente utilizando términos como "si," "puesto que," "ya que," "dado que," "porque," "cuando," "si... por lo tanto," "si... en consecuencia," "es suficiente," "solo si," "por ende," "es necesario," "luego," "por ello" (esto, eso) y otros similares. En notación lógica, se representa con el símbolo →, el cual sustituye la expresión "si... entonces."

Ejemplos:

- Si Iván cursa matemáticas, entonces está repitiendo la asignatura. $p \rightarrow q$
- Cuando vengo a clase, no llego temprano al trabajo. $q \rightarrow$

-r

- Sofía es médico; por lo tanto, conoce los síntomas de la gripe. s → t
- Alejandro fue al médico, es suficiente para faltar justiciar su ausencia. u → -v
- Llegó el bus, en consecuencia, no se suspendió el viaje. p → q

Bicondicional (si y solo sí) ↔

Este tipo de relación, también conocido como equivalencia o bicondicional materiales, establece una doble condición entre dos proposiciones simples. Esto significa que la primera proposición condiciona la segunda y, al mismo tiempo, la segunda condiciona la primera. En otras palabras, si una de ellas es verdadera o se cumple, necesariamente la otra también debe ser verdadera. El conector bicondicional se expresa de manera compuesta utilizando la expresión "si y solo si" (que puede abreviarse como "ssi") o sus equivalentes, como "a no ser que," "solamente si," "únicamente si," "si y solo sí," "siempre y cuando," "salvo que" (que indica negación), "siempre que," "con tal que," "a menos que" (que indica negación), "es necesario y suficiente que." En lógica, se representa con una doble flecha ↔.

Ejemplos:

- Milagros ira de viaje, siempre y cuando obtenga el permiso, p ↔ q
- Carla se graduará este semestre, solamente si aprueba todas las materias. r ↔ s
- Luis aprobará el curso solamente si acumulan 7 puntos en la evaluación. t ↔ u

- Voy para Quito, si y solo sí tengo dinero. $m \leftrightarrow n$
- Olger ganará la carrera salvo que se no participe. $p \leftrightarrow -q$

Ejercicios propuestos.

Identifique el tipo de conectivo y simbolice:

Proposición lógica	Conector	Simbolización
1. Si el río creció, llovió en la cabecera.	Condicional	$p \rightarrow q$
2. El agua es inodora e incolora.		
3. Pedro ni fuma ni toma licor.		
4. El día es caluroso, aunque está sombreado.		
5. Platón fue un filósofo griego.		
6. Porque subo las escaleras, me subió la tensión.		
7. 16 es igual a 24, si y solo sí, 24 es igual a 16		

Signos de agrupación

Estos elementos tienen la función de organizar las proposiciones y en el contexto de la lógica, cumplen un papel similar al de los signos de puntuación en el lenguaje común. Es fundamental ajustarlos de acuerdo con las proposiciones y su significado específico. En resumen, se emplean para estructurar de manera apropiada las relaciones lógicas entre las proposiciones. En otras palabras:

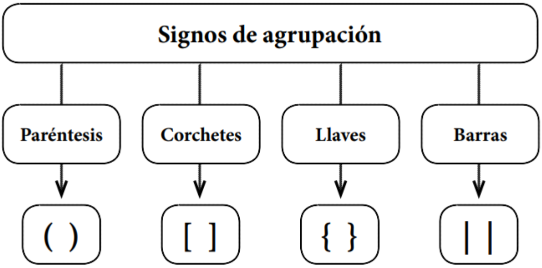
Los signos de agrupación posibilitan conferir significado a las expresiones que se pretenden representar.

Restringen la extensión de los conectores (también conocidos como conectivos u operadores) lógicos que enlazan las declaraciones individuales (simples o atómicas) con el fin de crear declaraciones complejas (moleculares).

Constituyen componentes fundamentales de la lógica proposicional.

Previenen la falta de claridad en las expresiones.

Gráfico. Signos de agrupación.



Es importante tener en cuenta lo siguiente:

Las expresiones o proposiciones compuestas más pequeñas, compuestas por dos proposiciones simples, se delimitan mediante el uso de paréntesis.

Ejemplos:

$(p \wedge q)$; $(m \vee n)$; $(s \rightarrow -r)$

- Las expresiones de dimensiones intermedias se delimitan utilizando corchetes (contienen al menos dos expresiones pequeñas).

$[(p \vee q) \rightarrow -r]$; $[(r \wedge s) \vee (t \vee s)]$

- Las expresiones de mayor tamaño se delimitan utilizando llaves.

$\{[(p \vee -q) \rightarrow t] \leftrightarrow (-r \wedge s)\}$

- Las expresiones más grandes se encierran entre barras.

$|\{[(p \vee q) \vee (r \rightarrow -p)] \rightarrow [r \leftrightarrow (q \vee -p)]\} \wedge p|$

Es posible reiterar los signos de agrupación, pero siempre delimitando el carácter de los conectores o conectivos (operadores lógicos)

- A las expresiones similares no es necesario colocarles varios paréntesis.

  $(p \wedge q \wedge r)$; $(q \vee s \vee p)$

- Las proposiciones simples no es necesario encerrarlas entre paréntesis.

  s; $-q$; $p \wedge (q \vee r)$; $p \rightarrow q$

2.2.2 Tablas de verdad

Las tablas de verdad son el resultado de representar todas las posibles asignaciones de valores a las variables proposicionales y analizar sus consecuencias. Estas tablas permiten verificar la validez o no de una fórmula proposicional bien formada (fbf), es decir, si el razonamiento es válido o no lo es.

En el proceso de construir las tablas de verdad, se inicia la deducción a partir de las variables y se procede a través de los operadores de menor jerarquía, cuyos valores se determinan según la tabla fundamental correspondiente. Luego, se avanza gradualmente hacia el operador de mayor jerarquía, que también se conoce como el operador principal. Este enfoque se denomina método del condicional asociado y se utiliza para determinar la validez de una fórmula proposicional bien formada.

Clasificación y construcción de las tablas de verdad

Las tablas de verdad se clasifican en:

- Tablas de verdad fundamentales.
- Tablas de verdad completas o derivadas, conocidas como cálculo proposicional.

- Tablas de verdad parciales.

El proceso para crear las matrices o tablas de verdad se sigue de la siguiente manera:

1. Identificar la cantidad de variables proposicionales (por ejemplo, p, q, r, s, ...) presentes en la expresión o fórmula proposicional.
2. Calcular el número de filas en la tabla aplicando la regla 2 elevado a la n, donde la base 2 representa los dos posibles valores de verdad (V o F) y n corresponde al número de variables proposicionales.
3. Asignar valores de verdad (V o F) a las variables proposicionales, considerando todas las combinaciones posibles.

Tablas de verdad fundamentales

Las tablas de verdad fundamentales representan el nivel inicial en la jerarquía de la deducción lógica. Estas tablas se crean mediante el análisis de la verdad de las proposiciones elementales que involucran a los conectores u operadores lógicos. Estas tablas sirven como cimiento para la deducción lógica.

Los operadores lógicos a tener en cuenta son la negación, la conjunción, la disyunción inclusiva, la disyunción exclusiva, el condicional y el bicondicional. Se les asignan valores de verdad (verdadero y falso) a las variables proposicionales presentes en las definiciones fundamentales de cada conector lógico. Luego, se examina la veracidad de cada combinación posible de los valores asignados a estas variables.

Las fórmulas lógicas fundamentales que se estudian, basadas en las definiciones de cada operador lógico, son:

- -p (negación) también se puede notar: ¬ p ó ~p

- $p \wedge q$ (disyunción)
- $p \vee q$ (disyunción inclusiva)
- $p \vee q$ (disyunción exclusiva)
- $p \rightarrow q$ (condicional, implicación)
- $p \leftrightarrow q$ (bicondicional, doble implicador)

A continuación, se muestran las tablas esenciales

Cuadro. Tablas de verdad fundamentales

Negación (-)

Si p es una proposición simple –p (o ¬ p o ~p) será su negación, entonces –p será falsa si p es verdadera y verdadera si p es falsa. La tabla tendrá 2^1 filas: 2^1 = 2 filas

-p

P	-p
V	F
F	V

Conjunción (^)

La proposición será verdadera cuando sus dos componentes sean verdaderos y las demás serán falsas. La tabla tendrá 2^2 filas: 2^2 = 4 filas;

p ^ q

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción inclusiva (v)

La proposición solo será falsa cuando sus dos componentes sean falsos. La tabla tendrá 2^2 filas: 2^2 = 4 filas

p v q

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva ($\vee$)

La proposición será verdadera cuando sus dos componentes sean diferentes, uno verdadero y el otro falso. La tabla tendrá 22 filas: 22 = 4 filas

$p \veebar q$

p	q	p v q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro. Tablas de verdad fundamentales

Condicional (→)

La proposición será falsa solo si su antecedente es verdadero y su consecuente es falso, las demás serán verdaderas. La tabla tendrá 2^2 filas: $2^2 = 4$ filas.

$p \rightarrow q$

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Matriz bicondicional (↔)

La proposición será verdadera cuando sus dos componentes sean verdaderos o falsos (iguales).

La tabla tendrá 2^2 filas: $2^2 = 4$ filas

$p \leftrightarrow q$

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: la negación de una proposición completa o fundamental, cambia el valor de la función veritativa (de verdad).

Ejemplo: $\sim(p \underline{\vee} q)$

La tabla tendrá 2^2 filas: $2^2 = 4$ filas

p	q	p v q	~(p v q)
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Tablas de verdad completas o derivadas (cálculo proposicional)

En esta tabla o matriz particular, se combinan las tablas de verdad fundamentales para calcular el valor de verdad de una proposición polinómica cualquiera. Esto facilita la identificación del tipo de proposición polinómica. Por lo tanto, cuando se busca determinar la validez de una inferencia o razonamiento, se crea una tabla de verdad completa. Esta tabla puede arrojar tres resultados posibles o categorías de proposición, que determinarán si la inferencia o el razonamiento es válido o no.

Tipos de polinomios proposicionales

- Tautología: Un polinomio proposicional se considera tautológico cuando la proposición compuesta (molecular) resulta verdadera en todas las situaciones posibles. Por lo tanto, se clasifica como una tautología, lo que implica que el polinomio es válido y está correctamente construido.

- Contradicción: Una proposición compuesta se convierte en contradictoria cuando resulta falsa en todas las situaciones posibles. Por lo tanto, el polinomio no se considera válido.

- Contingencia o indeterminación: Una proposición compuesta se clasifica como contingente cuando algunas situaciones la hacen verdadera y otras la hacen falsa. En consecuencia, se considera que el polinomio no es válido.

Ejemplos:

a) [(p ↔ -q) → (-p → q)]

La tabla tendrá 22 filas: 22 = 4 filas (tiene dos variables proposicionales).

p	q	-p	-q	(p ↔-q)	(-p → q)	[(p ↔ -q) → (-p q)]
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Dado que todos los resultados son veraces, estamos en presencia de una tautología. En consecuencia, podemos afirmar que el razonamiento es válido.

b) -[q ∨ (p → -q)]

La tabla tendrá 22 filas: 22 = 4 filas (dos variables proposicionales).

p	Q	-q	(p →-q)	[q v (p → -q)]	[-q v (-p → q)]
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F

Dado que todos los resultados resultaron ser incorrectos, se clasifica como una contradicción. Por lo tanto, podemos concluir que el razonamiento no es válido.

c) [(-p → q) ^ r]

La tabla tendrá 23 filas: 23 = 8 filas (tiene tres variables proposicionales)

p	Q	r	-p	(-p → -q)]	[(-p → q) ^ r]
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F

Debido a la presencia de combinaciones de valores verdaderos y falsos, se identifica como una contingencia, lo que conlleva a la conclusión de que el razonamiento no es válido.

Ejercicios propuestos

Evaluar la validez de las siguientes fórmulas o proposiciones polinómicas mediante el uso de tablas de verdad completas o tablas derivadas, y especificar si se trata de contradicciones, tautologías o contingencias:

1. $[(-p \wedge q) \vee -q]$
2. $[(p \rightarrow -q) \wedge (-p \leftrightarrow q)]$
3. $\{[(-p \vee q) \wedge (p \vee -q)] \leftrightarrow -p\}$
4. $[p \wedge (-q \wedge p)] \rightarrow [-p \leftrightarrow (-q \wedge p)]$
5. $\{[(q \vee -p) \wedge (p \rightarrow p)] \rightarrow (p \rightarrow q)\}$
6. $|\{p \rightarrow [(q \wedge r) \vee -r]\} \wedge (r \vee -p)|$
7. $|-\{-p \vee [(p \rightarrow q) \wedge r]\} \wedge -p|$
8. $\{(p \vee q) \vee [(r \vee p) \vee (-p \rightarrow r)]\}$
9. $\{-[(p \wedge q) \vee -r] \rightarrow [(r \leftrightarrow q) \vee (q \wedge p)]\}$
10. $-[t \rightarrow (q \rightarrow t)]$
11. $\{[-(-p \wedge r) \rightarrow -r] \vee (-p \leftrightarrow r)\}$
12. $\{[(p \wedge -q) \vee r] \rightarrow -(r \leftrightarrow -p)\}$
13. $-\{[(p \vee -q) \leftrightarrow (-q \rightarrow r)] \wedge (r \vee -p)\}$
14. $\{[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow -q\}$
15. $\{-[-(p \wedge -q) \rightarrow -(-r \vee -q)]\}$

2.3 Proporciones y expresiones algebraicas

Su objetivo principal es abordar los temas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas. Esto incluye la resolución y representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con una o dos variables, así como sistemas cuadráticos. Además, se utiliza para modelar situaciones del mundo real a través de estas ecuaciones, tales como el problema de punto de equilibrio, oferta y demanda, producción, inversiones, transporte, entre otros ejemplos.

2.3.1 Ecuaciones lineales

Definición.- Una ecuación se define como una declaración que establece la igualdad entre dos expresiones, las cuales son conocidas como los términos de la ecuación y están divididas por el símbolo de igual "=".

Ejemplos:

$$x + 2 = 0$$

$$\frac{x+4}{3} = 9$$

En los ejemplos previos, cada ecuación incluye al menos una variable. Una variable se define como un símbolo que puede ser sustituido por cualquier número de un conjunto dado. Los símbolos más comunes utilizados para representar variables son t, u, v, w, x, y, z. Por lo tanto, en los ejemplos anteriores, las variables son x y z. Los números 2 y 1 en las ecuaciones son cantidades fijas conocidas como constantes.

Resolver una ecuación.- implica encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es cierta. Estos valores son conocidos como las soluciones de la ecuación.

Ecuación lineal.- Una ecuación se considera lineal o de primer grado si el grado del polinomio es 1, lo que significa que las variables tienen un exponente de 1.

Ejemplos:

$x + 5 = 0$

Una ecuación lineal se puede escribir de la forma:

$a\,x + c = 0$

Donde $a \neq 0$; a y c son números reales.

Propiedades de igualdad

En la Suma y en la Resta.

Cuando una cantidad se agrega o se resta de ambas partes de una ecuación, se obtiene una nueva ecuación que es igual en valor a la original.

Si a, b, c son números reales; $a = b$

Entonces: $a + c = b + c$ y $a - c = b - c$

En la Multiplicación y en la División.

Si se realiza una multiplicación o división por una cantidad diferente de cero en ambos lados de una ecuación, se obtendrá una nueva ecuación que conserva la misma equivalencia con la original.

Si a, b, c son números reales; $a = b$; $c \neq 0$. Entonces: $a\,c = b\,c$ y $a/c = b/c$

Transposición de Términos.

Cambiar la posición de los términos en una ecuación implica moverlos de un lado a otro de la ecuación, y esto debe realizarse siguiendo las siguientes pautas:

1.) Todo lo que está sumando en un miembro para al otro restando.

Ejemplo:

$$x + 5 = 2x - 6$$

Primer miembro $\longrightarrow x = 2x - 6 - 5 \longleftarrow$ segundo miembro

Primer miembro x=2x-6-5 segundo miembro

El 5 que se suma en el primer lado se traslada al segundo restando.

2.) Cualquier elemento que se reste en un lado se transfiere al otro lado sumándolo.

Ejemplo: $x + 5 = 2x - 6$

$x + 5 + 6 = 2x$

El 6 que se resta en el segundo lado se traslada al primero sumándolo.

3.) Todo lo que está multiplicando en un miembro pasa al otro dividendo.

Ejemplo: $2\,x = 5$

$$x = \frac{5}{2}$$

4) Cualquier valor que realice una división en un lado se traslada al otro lado realizando una multiplicación.

Ejemplo: $\frac{x}{4} = 3$

El 4 que está dividiendo en el primer miembro pasa al otro multiplicando. Así:

$x = 3.\,4$

Resolución de ecuaciones lineales

Ejemplo: $2(2x + 1) = 15 + 3x$

Para resolver una ecuación lineal, se sigue el siguiente proceso:

1) Realizar las operaciones necesarias en los lados de la ecuación si es necesario; de esta manera.

$4x + 2 = 15 + 3x$

2) Reorganizar los términos de manera que las variables queden en el primer lado de la ecuación. Así: $4x–3x = 15 – 2$

3) Simplificar expresiones iguales en ambos miembros de la ecuación. Así: $x = 13$

4) Despejar la incógnita.

5) Verificar

Ejercicio 1

Transponer términos de modo que las variables quedan en el primer miembro y los demás en el segundo:

1) $x - 4 + 2x - 15 = -x$

2) $a - 1 + 3a = -a + 2$

3) $2m + m^2 - 8 = 0$

4) $20 - 9x = - x^2 + x$

5) $9a - a^2 = 10 + 2\ a^2$

6) $y - 5 = 4y + 10$

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $9\ (a + 2) = -6\ (4 - a) + 18$

2) $3m - 22 = -2m - 7$

3) $2\ (2x + 1) = 15 + 3x$

4) $7b + 7 = 2(b + 1)$

5) $2\ (p - 1) - 3\ (p - 4) = 4\ p$

Resolución de ecuaciones con literales

Inicialmente, es necesario simplificar las ecuaciones y posteriormente agrupar todos los términos que involucren la incógnita en un solo lado.

Ejemplo 1:

Resolver lo siguiente:

$s=p+prt$

Despejar r

$s - p = p\ r\ t$

$p\ r\ t = s - p$

$$r = \frac{s-p}{pt}$$

Ejercicios:

Calcular la variable especificada en cada fórmula en los ejercicios siguientes.

1)	A = l w;	despejar w
2)	V = 1/3 B h;	despejar h
3)	I = p r t;	despejar r
4)	P = 2 l + 2 w;	despejar w
5)	A = 1/2 h (B + b);	despejar B

Resolución de ecuaciones fraccionarias

Para solucionar una ecuación que involucra fracciones, seguimos la regla siguiente:

Ejemplo: Resolver la ecuación:

$$\frac{x-5}{x} - \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x-5}$$

1.) Se busca el mínimo común múltiplo (m.c.m). entre los denominadores.

m.c.m. = x (x – 5)

2.) La ecuación se simplifica al encontrar el denominador común más pequeño (m.c.d.), que se obtiene dividiendo el mínimo común múltiplo (m.c.m.) por el denominador y luego multiplicando el resultado por ese mismo denominador. Así:

x(x – 5) ÷ x = (x – 5) (x – 5) y (x – 5) ÷ x = 5 (x – 5)

x (x – 5) ÷ (x – 5) = x (x + 5)

Quedando la fracción reducida al m.c.d. así:

(x – 5) (x – 5)–5 (x – 5) = x (x + 5)

3.) Realizar las operaciones especificadas y simplificar expresiones iguales.

$$x^2 - 5x - 5x + 25 - 5x + 25 = x^2 + 5x$$

$$x^2 - 15x + 50 = x^2 + 5x$$

4.) Se despeja la incógnita

$$x^2 - 15x - x^2 - 5x = -50$$

$$-20x = -50$$

$$x = \frac{-50}{-20}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias.

1) $\frac{x+3}{x} = \frac{2}{5}$

2) $\frac{2}{y+5} + \frac{1}{y-5} + \frac{20}{x^2-25} = 0$

3) $\frac{3a-2}{2a+3} = \frac{3a-1}{2a+1}$

4) $\frac{y+1}{3y-6} - \frac{y-1}{2y-4} = \frac{10-y^2}{6y^2-24}$

5) $\frac{m}{m+3} - \frac{m}{m-3} = \frac{3m-4}{m^2-9}$

2.3.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática se denomina también ecuación de segundo grado, dado que el exponente máximo presente en la ecuación es dos.

$$ax^2 + bx + c = 0$$ e la forma:

Donde a, b y c son, números reales.

Mientras que la ecuación lineal tiene una única solución (una raíz), la ecuación cuadrática puede tener dos soluciones distintas (dos raíces).

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por Factorización.

Un método para resolver ecuaciones cuadráticas es por factorización.

Ejemplos:

1) $4x^2 - 3x = 0$

Mediante el proceso de factorización, obtenemos como resultado. (Factor común):

$x(4x - 3) = 0$

Se iguala a cero ambos factores:

$x_1 = 0$ $\qquad$ $4x - 3 = 0$

$$4x = 3$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

2) $x^2 + x - 12 = 0$

Mediante el proceso de factorización, obtenemos como resultado. (Trinomio de la forma :

$(x + 4)(x - 3) = 0$

Igualando a cero ambos factores.

$x+4 = 0$ $x - 3 = 0$

$x_1 = -4$ $x_2 = 3$

3) $9x^2 - 4 = 0$

Mediante el proceso de factorización, obtenemos como resultado (Trinomio de la forma ax2+bx+c):

$(3x+2)(3x-2) = 0$

Igualando a cero cada factor:

$3x + 2 = 0$ $3x - 2 = 0$

$3x = -2$ $3x = 2$

$x_1 = -2/3$ $x_2 = 2/3$

Ejercicios

Resolver los siguientes ejercicios por factorización

1) $x^2 - 4x + 4 = 0$

2) $y^2 - 7x + 12 = 0$

3) $t^2 + 3t + 2 = 0$

4) $x^2 - 16 = 0$

5) $x^2 + x - 12 = 0$

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por Fórmula Cuadrática.

Las soluciones de la ecuación cuadrática ax2+bx+c = 0 En donde a, b y c son constantes y a ≠ o, se expresa como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

Resolver la siguiente ecuación aplicando la fórmula cuadrática la ecuación:

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

Pasos para aplicar la fórmula Cuadrática.

1.) Determinar la estructura de la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

luego determinar los valores de a, b, c:

a = 4 b=–12 c = 9

2.) Aplicar la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{8}$$

x1 = 3/4 x2 = 3/4; son raíces iguales

El valor $b^2 - 4ac$ que está contenido en la raíz se conoce como el discriminante de la ecuación.

Podemos enunciar las siguientes propiedades:

- Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son imaginarias, y desiguales.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces iguales y reales.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son desiguales y reales.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones mediante la fórmula cuadrática y determine si las raíces son reales, desiguales o imaginarias.

1) $x^2 + 3x + 2 = 0$

2) $x^2 - 18x = -81$

3) $8a = -4a^2 - 3$

4) $y^2 - 3y + 2 = 0$

5) $5x^2 + 5x + 1 = 0$

Resolución de ecuaciones fraccionarias de segundo grado.

Ejemplo:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{6}$$

1) Reducir las ecuaciones al m.c.d. (quitar los denominadores)

El m.c.d. es:

6 (x – 2) (x – 1), luego:

6 (x – 1) – 6 (x – 2) = (x – 2) (x – 1)

2) Realizar las operaciones que se especifican:

$$6x - 6 - 6x + 12 = x^2 - 3x + 2$$

$$6x - 6 - 6x + 12 - x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

Multiplicar por (- 1)

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

4) Resolver las ecuaciones aplicando en cualquier método.

$(x - 4) = 0$ $(x + 1) = 0$

$x - 4 = 0$ $x + 1 = 0$

$x_1 = 4$ $x_2 = -1$

$$\frac{1}{4-2} - \frac{1}{4-1} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$luego: \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias de segundo grado

1) $\frac{x^2}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3}{10}$

2) $4x - \frac{13}{x} = \frac{3}{2}$

3) $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = 3(x-5)$

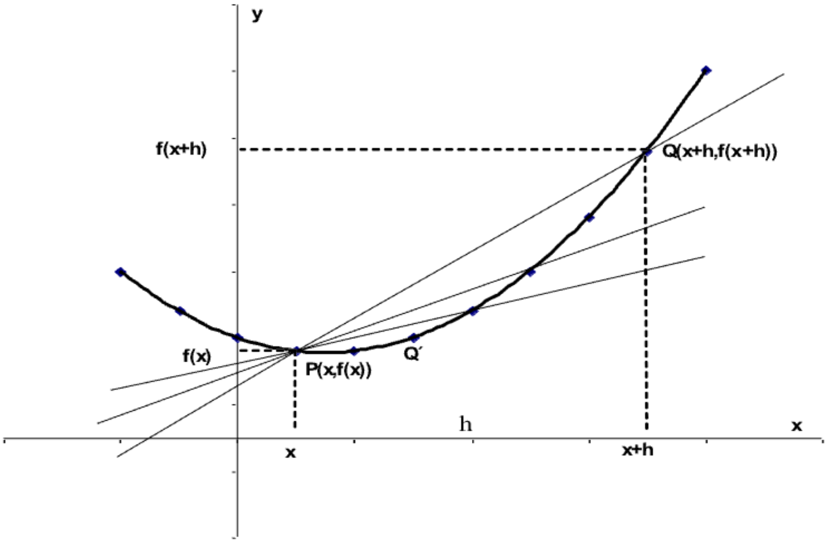
4) $\frac{1}{4}(x-4) + 2(x-5) = \frac{1}{5}(x^2 - 53)$

5) $\frac{5}{x^2-1} - \frac{6}{x+1} = 3\frac{5}{8}$

2.4 Derivadas

Es una forma de cuantificar cómo la función cambia su valor a medida que su variable independiente varía. También se puede decir que la derivada de una función en un punto representa la inclinación de la recta tangente a la curva en ese punto.

Uno de los desafíos fundamentales que aborda el cálculo consiste en determinar la inclinación de la línea recta que toca una curva en un punto específico. Imaginemos los puntos P y Q en la curva definida por la función y = f(x). La línea que conecta P y Q se conoce como línea secante, ya que une dos puntos de la curva. Si hacemos que el punto Q se acerque cada vez más a P, es decir, cuando h tiende a cero, entonces la línea secante gradualmente se convierte en una línea tangente, tocando la curva en un solo punto.



Encontremos la pendiente de la línea secante PQ.

$$m_{sec} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$m_{sec} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cuando el punto Q se acerca cada vez más al punto P, la pendiente de la línea secante tiende a igualarse con la pendiente de la línea tangente, a medida que la distancia "h→0" se acerca a cero. La pendiente de la línea tangente a la curva en el punto P se conoce como la derivada según la definición.

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} \; ; \; \mathbf{f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$ **"derivada por la definición"**

Ejemplo 1:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$f(x) = 3x + 5$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad FORMULA$

Solución:

Encontramos $f(x + h)$

$f(x + h) = 3(x + h) + 5$

Reemplazamos en la formula.

$$y' = f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y' = f'(x) = \frac{3(x+h) + 5 - (3x+5)}{h}$$

$$y' = f'(x) = \frac{3x + 3h + 5 - 3x - 5}{h}$$

$$y' = f'(x) = \frac{3h}{h}$$

$$y' = f'(x) = 3$$

Ejemplo 2:

Encontrar la ecuación de la línea tangente a la curva;

$y = x^2 - 4x - 5$; en el punto (3 , -8).

Realizamos el cálculo de la derivada de la función.

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad FORMULA$

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

Solución:

Encontramos $f(x+h)$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) - 5$$

Reemplazamos en la formula.

$$y' = f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^2 - 4(x+h) - 5\right] - (x^2 - 4x - 5)}{h}$$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - 5 - x^2 + 4x + 5}{h}$$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(2x + h - 4\right)}{h} = 2x + 0 - 4 = 2x - 4$$

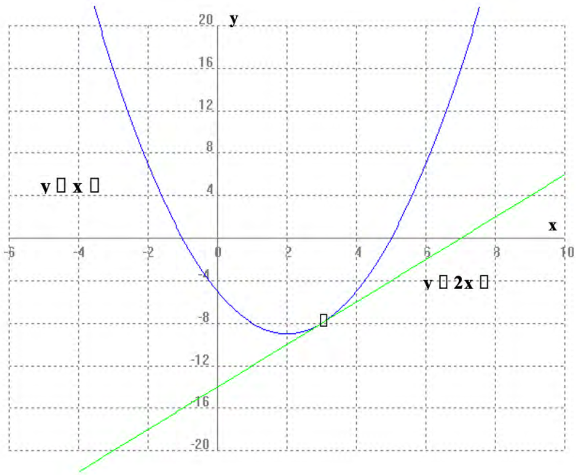
Al remplazar el punto (3,-8) en la derivada, encontramos la pendiente

$$y'(3) = f'(3) = 2(3) - 4 = 2 \qquad \text{entonces } m = 2$$

Utilizando la pendiente (m = 2) y el punto (3, -8), determinamos la ecuación de la recta empleando el método de la forma punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad\qquad y + 8 = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 14$$



Reglas de derivación

La derivación a través de la definición puede ser un procedimiento largo y tedioso. Afortunadamente, existen reglas que permiten realizar la diferenciación de manera automática y eficaz. Estas reglas se resumen en tres.

Derivada de una constante.- La derivada de una constante es igual a 0

$$y = f(x) = c \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$$

Derivada de una potencia.- La derivada de una potencia se obtiene multiplicando el exponente por la base elevada a ese mismo exponente menos 1.

$$y = f(x) = cx^n \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = c.n.x^{n-1}$$

Derivada de una constante por una función.- La derivación de un número constante multiplicado por una función es igual a la constante multiplicada por la derivación de la función.

$$y = c * f(x) \qquad y' = c * f'(x)$$

Ejemplos: Determine la derivada de las funciones aplicando las reglas de derivación:

$$y = f(x) = -80 \qquad y' = f'(x) = 0$$

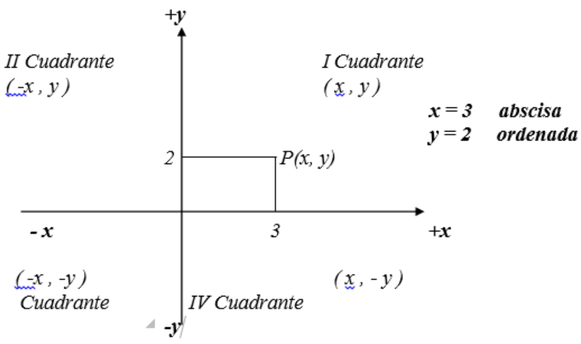
$$y = f(x) = 9x^8 \qquad y' = f'(x) = 72x^7$$

2.5 Funciones y gráficas z

Coordenadas Rectangulares.

El sistema de coordenadas rectangulares nos permite ubicar puntos en el plano. Sirve además para representar ecuaciones como también funciones.

El plano cartesiano como también se lo llama es un sistema formado por dos ejes un horizontal llamado eje de las x o eje de las abscisas y otro vertical llamado eje de las y o eje de las ordenadas que se cortan perpendicularmente entre sí. Las x hacia la derecha son positivas y hacia la izquierda negativas. Las y hacia arriba son positivas y hacia abajo negativas. El cero es considerado como el punto de origen del sistema.



Ejes de coordenadas

Intersección y Simetrías

Una Intersección x es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una Intersección y es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para determinar la intersección en x de la gráfica de una ecuación igualamos y a cero y resolvemos la ecuación resultante.

Para determinar la intersección en y igualamos x a cero y resolvemos para y.

Ejemplo:

Determinar las intersecciones de la ecuación $y = 2x + 1$ y graficar

Solución:

Intersección en x $\quad y = 0$

$0 = 2x + 1$

Despejando x se tiene que: $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}$

De modo que la intersección en x es el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$

Intersección en y $\quad x = 0$

$y = 2(0) + 1$

$y = 1$

Así la intersección en el eje y es el punto $(0, 1)$

Simetría

Antes de graficar una función es necesario examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones ya que es una parte fundamental de la Matemática.

Por lo tanto, examinaremos si las gráficas de las funciones tienen o no simetría. Entendiéndose por simetría cuando la parte izquierda de un gráfico es el reflejo o imagen de la parte derecha en y, consecuentemente la parte de arriba de un gráfico es reflejo o imagen de la parte de abajo en el eje x.

Definiciones:

Una gráfica es simétrica con respecto a y si y sólo si (-x, y) pertenece a la gráfica cuando (x,y) pertenece a ella. (es decir que si se cambia de signo a la x, la ecuación no altera)

Una gráfica es simétrica con respecto a x si y sólo si (x, -y) pertenece a la gráfica cuando (x,y) pertenece a ella (es decir que si se cambia de signo a la y, la ecuación no altera.

Una gráfica es simétrica con respecto al origen si y sólo si (-x, -y) pertenece a la gráfica cuando (-x , -y) pertenece a la gráfica cuando (x , y) pertenece a ella (es decir que si se cambia de signo a la x y a la y , la ecuación no altera.

Pruebas de Simetría

Simetría con respecto a x

Para hallar la simetría con respecto a x remplazamos y por – y en la ecuación dada. Será simétrica si se obtiene la ecuación equivalente.

Simetría con respecto a y

Para hallar la simetría con respecto y reemplazamos x por –x en la ecuación dada. Será simétrica si se obtiene la ecuación equivalente.

Simetría con respecto al origen

Para hallar la simetría con respecto al origen remplazamos x por –x y y por –y en la ecuación dada. Será simétrica si se obtiene la ecuación equivalente.

Ejemplo: Dada la ecuación $y = x^2 – 4$

Probar si hay simetría con respecto al eje x , al eje y y al origen.

Simetría con respecto a x, reemplazamos y por –y

$-y = x^2 – 4$; $y = -x^2 + 4$

No hay simetría porque no es equivalente a la ecuación dada.

Simetría con respecto a y, reemplazamos

x por x $y = (-x)^2 – 4$; $y = x^2–4$

Si hay simetría porque es equivalente a la ecuación dada.

Simetría con respecto al origen, reemplazamos x por –x; y por –y

$-y = (-x)^2 – 4$; $-y = x^2 – 4$; $y = -x^2 + 4$

No hay simetría porque no es equivalente a la ecuación dada

Ejercicio

Dadas las siguientes ecuaciones, determine las intersecciones en x e y, pruebe simetrías con respecto a x, con respecto a y, con respecto al origen.

1) $x^2 - y^2 = 1$

2) $12x + 8y = 8$

3) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{7}{3}$

4) $49x2 - 25y2 = 0$

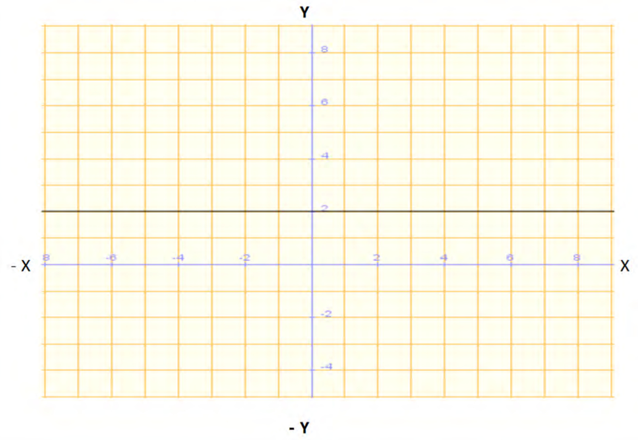
5) $y = 6x2 + 17x + 5$

6) $y = (x + 2)2 - 3$

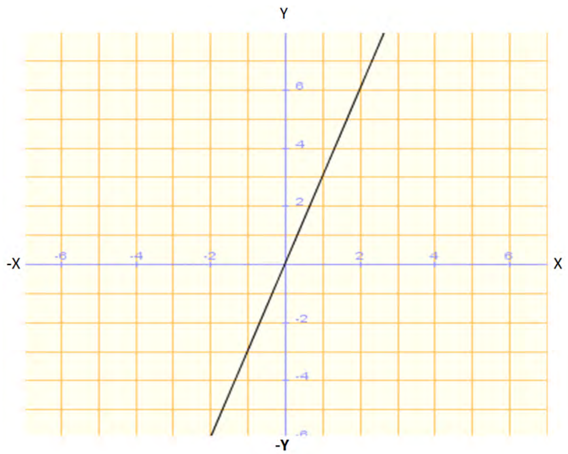
2.6.1 Gráficas de funciones

Gráfica de una función constante.–La gráfica de una función constante es una recta paralela al eje horizontal puesto que el rango es el mismo para cualquier elemento del conjunto dominio.

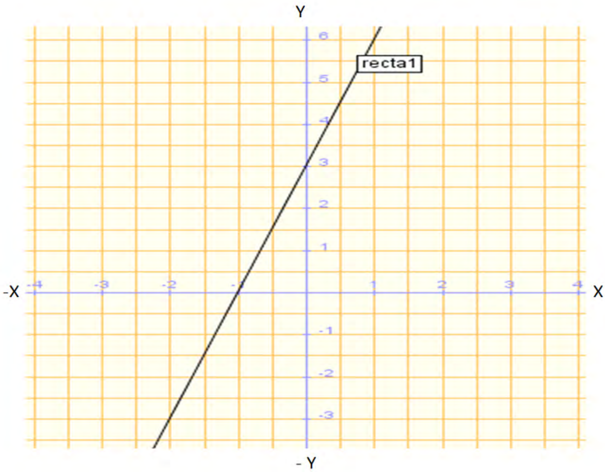
Gráfica de la función Constante: Y=2



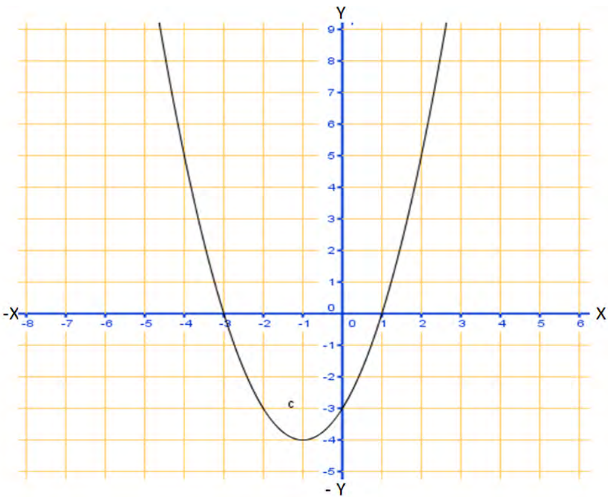
Gráfica de una función lineal de la forma y = ax. Es una recta que pasa por el origen.



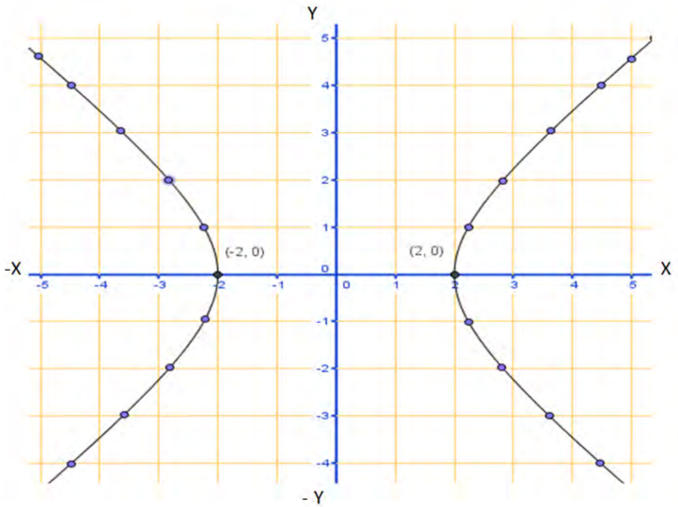
Gráfica de una función lineal de la forma y = ax + b. Es una recta que interseca en el eje x y en el eje y.



Gráfica de la función cuadrática.- Es una curva denominada parábola abierta hacia arriba o hacia abajo cuando y = f(x) o abierta hacia la izquierda o a la derecha cuando x = f(y).



Gráfica de la función inversa.- Es una curva denominada hipérbola, que se extiende hacia el infinito.



Aplicaciones

Para graficar funciones procedemos de la siguiente manera:

Se busca el dominio de la función.

Se encuentran las intersecciones para los ejes x e y

Se determinan las simetrías con respecto al eje x, al eje y, y al origen.

Se construye una tabla de valores para el conjunto dominio y el rango de la función.

Se traza el sistema de coordenadas rectangulares y se ubican los pares ordenados obtenidos en la tabla de valores.

Se unen los puntos para obtener la gráfica.

Ejemplo:

Graficar la ecuación: $y = x^2 + 2x - 3$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

$0 = x^2 + 2x - 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1)$

$x = -3$; $x = 1$ Luego,

$x = -3$; $x = 1$ Luego,

Los puntos de intersección en x son (-3, 0) (1, 0)

En y: $x = 0$

$y = (0)2 + 2(0) - 3$

$y = -3$; Luego:

El punto de intersección en y es (0, -3)

Simetrías

En x, reemplazo (y) por (–y)

$-y = x^2 + 2x - 3$ multiplicamos por $(-1) y = -x^2 - 2x + 3$

No hay simetría, no es equivalente a la función original En y, reemplazo (x) por (–x)

$y = (-x)^2 + 2(-x) - 3$

$y = x^2 - 2x - 3$

No hay simetría, no es equivalente a la función original En el origen reemplazo (x) por (–x) (y) por (–y)

$-y = (-x)^2 + 2(-x) - 3$

$-y = x^2 - 2x - 3$ multiplicamos por (-1) $y = -x^2 + 2x + 3$

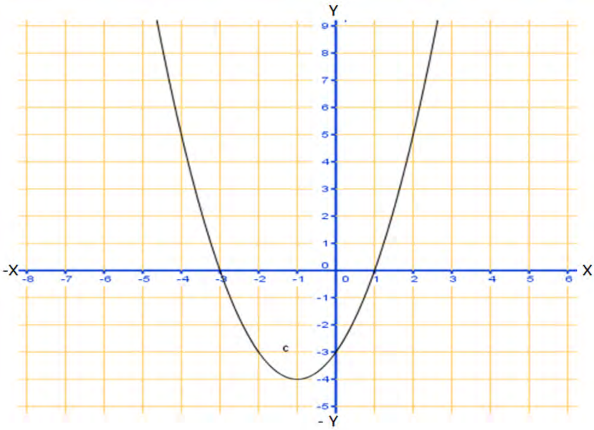
No hay simetría, no es equivalente a la función original

Tabla de valores para x e y

x	-8	-3	4	6
y	45	0	21	45

Ubicar los puntos en el plano cartesiano y graficar

Gráfica de: $y = x^2 + 2x - 3$.



Conclusión

El valor de verdad se refiere a la veracidad o falsedad de una afirmación lógica. En lógica, las proposiciones pueden ser verdaderas (V) o falsas (F). La lógica clásica utiliza operadores como AND (conjunción) y OR (disyunción) para combinar proposiciones y determinar su valor de verdad. También se emplea el operador NOT (negación) para invertir el valor de verdad de una proposición. Los conectores lógicos permiten construir expresiones compuestas cuyo valor de verdad se evalúa mediante tablas de verdad. Esta noción de valor de verdad es fundamental en la lógica formal y tiene aplicaciones en la toma de decisiones, la informática y la filosofía.

Las proporciones en matemáticas son relaciones entre dos razones o cocientes iguales. Se expresan como a/b = c/d, donde a, b, c y d son números. Las proporciones se utilizan para resolver problemas de proporción y razón en diversas áreas, como la geometría y la física.

Las expresiones algebraicas son combinaciones de números, letras y operaciones matemáticas, como x + 2y–3. Se usan para representar situaciones desconocidas o variables en ecuaciones y desigualdades. Las expresiones algebraicas se manipulan para simplificar, factorizar o resolver ecuaciones, lo que es fundamental en álgebra y resolución de problemas matemáticos más complejos.

Las derivadas son conceptos clave en cálculo y matemáticas. Representan la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado. Se calculan a través de límites y fórmulas específicas, como la regla del producto y del cociente. Las derivadas permiten encontrar pendientes de tangentes, máximos y mínimos en funciones, y se aplican en física, economía, y muchas otras disciplinas para analizar cambios y tasas de crecimiento. La derivada de una función f(x) se denota como f'(x) o dy/dx y es fundamental en la modelización y resolución de problemas en ciencias y tecnología.

Las funciones son relaciones matemáticas que asignan a cada elemento de un conjunto de entrada (dominio) exactamente un elemento en un conjunto de salida (codominio). Se representan como f(x) y se utilizan para describir diversas relaciones y procesos en matemáticas y ciencias. Las gráficas de funciones son representaciones visuales que muestran cómo los valores de la función cambian con respecto a su variable independiente. Estas gráficas son útiles para visualizar tendencias y comportamientos de funciones. Pueden ser lineales, cuadráticas, exponenciales, trigonométricas, entre otras. El análisis de funciones y sus gráficas es esencial en la modelización y resolución de problemas en diversas disciplinas.

Autoevaluación

Capítulo 3

Inecuaciones, productos notables, factorización y funciones

3.1 Inecuaciones

Definición.–Son enunciados que indican que dos cantidades no son iguales; es decir que un número es menor o mayor que otro y las podemos identificar por el uso de uno o más símbolos.

Ejemplos:

$3<5$; $2>-1$; $x \leq a$; $x \geq b$

Símbolos de desigualdades

Símbolos	Notación	Ejemplos	Lectura
$<$	$a < b$	$2 < 3$	2 es menor que 3
$>$	$a > b$	$5 > 4$	5 es mayor que 4
$\leq$	$x \leq b$	$x \leq 2$	x es menor o igual que 2
$\geq$	$x \geq b$	$x \geq 3$	x es mayor o igual que 3

Por definición:

Si $a < b$ quiere decir que $b > a$ Si $a > b$ quiere decir que $b < a$

Propiedades de las desigualdades

Si dos desigualdades tienen sus símbolos en la misma dirección (iguales) tienen el mismo sentido.

$a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido

Si dos desigualdades tienen sus símbolos en distinta dirección (distintos) tienen sentido contrario.

$a < b$ y $c > d$ tienen sentido contrario

Si un número se suma o se resta ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad tendrá el mismo sentido que la original.

Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

Si $a < b$ entonces $a - c < b - c$

Ejemplos:

$7 < 10$, entonces $7 + 2 < 10 + 2$ porque $9 < 12$

$5 > 4$, entonces $5–1 > 4–1$ porque $4 >3$

Si ambos miembros de la desigualdad se multiplican o se dividen por un mismo número positivo, la desigualdad tendrá el mismo sentido que la original.

Si $a < b$ entonces $a. c < b. c$

Si $a < b$ entonces $a/c < b/c$

Ejemplos:

$5 > 3$, entonces $5.4 > 3. 4$ porque $20 > 12$ $2 < 6$, entonces $2/3 < 6/3$ porque $2/3 < 2$

Si ambos miembros de la desigualdad se multiplican o se dividen por un mismo número negativo, la desigualdad tendrá el sentido contrario que la original.

Ejemplos:

- Si $a < b$, entonces $a (-c) > b (-c)$
- Si $a < b$, entonces $a / (-c) > b/(-c)$

$4 < 7$ entonces $4(-2)>7(-2)$ porque $-8 > -14$

$12 > 6$ entonces $12/(-3)<6/ (-3)$ porque $-4 < -2$

Intervalos.- Los intervalos pueden ser abiertos o cerrados.

Intervalos Abiertos.- Son aquellos que se identifican con los símbolos "≤" y "≥" y se representan con paréntesis ( ) Ejemplo: $a \leq x \leq b$ en intervalo se denota así:

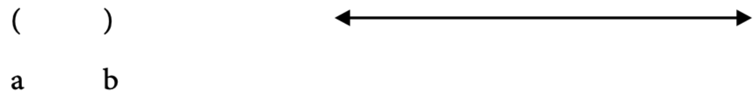
[a, b]; a y b son los extremos del intervalo y en este caso indica que a y b no están incluidos en el conjunto.

Intervalos Cerrados.- Son aquellos que se identifican con los símbolos "≤" y "≥" y se representan con corchetes [ ] Ejemplo: a ≤ x ≤ b un intervalo se denota así:

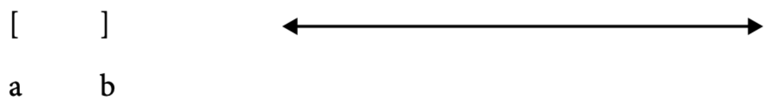
[a, b]; a y b son los extremos del intervalo y en este caso indica que a y b si están incluidos en el conjunto.

Graficación de intervalos.- Las desigualdades se pueden representar gráficamente en la recta numérica en forma de intervalos.

Intervalo abierto.- En la desigualdad a ≤ x ≤ b el intervalo es [a, b] para graficar se consideran los dos extremos de la desigualdad como a < b entonces a está a la izquierda y b a la derecha.



Intervalo cerrado.- En la desigualdad a ≤ x ≤ b, el intervalo es [a, b] para graficar se consideran los extremos a y b como a ≤ b, a va a la izquierda y b a la derecha.



Cuadro Representativos de los diferentes intervalos:

Tipo de intervalo	***Desigualdad***	***Grafica***	***Intervalo***
Intervalo abierto	$x > a$	a ∞	(a,∞)
	$x < a$	$-\infty$ a	$(-\infty,a)$
	$a < x < b$	a b	(a,b)
Intervalo semiabierto	$x \geq a$	a ∞	$[a,\infty)$
	$x \leq a$	$-\infty$ a	$(-\infty,a]$
	$a \leq x < b$	a b	$[a,b)$
	$a < x \leq b$	a b	$(a,b]$
Intervalo cerrado	$a \leq x \leq b$	a b	$[a,b]$

Resolución de desigualdades lineales

Una desigualdad lineal es la que se puede expresar en una de las siguientes formas, siendo $a \neq 0$

$ax + c < 0$

$ax + c > 0$

$ax + c \leq 0$

$ax + c \geq 0$

Las desigualdades o inecuaciones lineales se pueden resolver exactamente como las ecuaciones lineales, sólo con una excepción que, si multiplicamos o dividimos ambos lados por un número negativo, debemos cambiar la dirección a la desigualdad.

Ejemplo: Resolver la desigualdad lineal: $3(2x - 9) < 9$

Se procede de la misma manera para resolver ecuaciones lineales así:

Aplicar la propiedad distributiva para eliminar paréntesis: $6x - 27 < 9$

Transponer términos de modo que las incógnitas queden en el primer miembro:

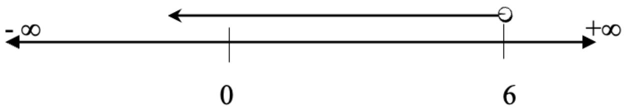
$6x < 27 + 9$

Reducir términos semejantes: $6x < 36$

Despejar la incógnita.

$x < 36/6$ Þ $x < 6$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 6)$ Gráficamente:



Otro Ejemplo:

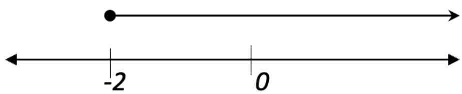
$-4(3x + 2) \leq 16$	
$-12x - 8 \leq 16$	Aplicar la propiedad distributiva
$-12x \quad \leq 16 + 8$	Transponer términos
$-12x \quad \leq 24$	Reducir términos semejantes
$-x \quad \leq 24/12$	Despejar x
$-x \quad \leq 2$	Dividir toda la desigualdad para (-1)

Cambiando de sentido:

$x \geq \quad -2$

El conjunto solución es el intervalo cerrado [-2, ∞). Gráficamente.

∞



Resolución de desigualdades fraccionarias

Ejemplo

Resolver la desigualdad: $2/3\ (x + 2) > 4/5\ (x - 3)$

Se reduce la inecuación al m.c.d (eliminar denominadores)

m. c. d = 15

$10\ (x + 2) > 12\ (x - 3)$

Se aplica todo el procedimiento para resolver desigualdades:

$10x + 20 > 12x - 36$

$10x - 12x > -20 - 36$

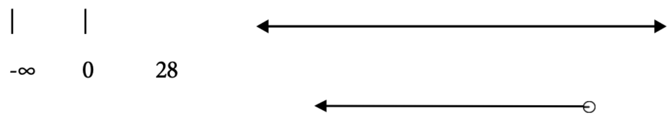
$-2x > -56$

$-x > -56/2$

$-x > -28$ se divide para (-1) cambiando de sentido

$x < 28$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 28)$ Gráficamente.



Ejercicio 10

Resuelva las desigualdades siguientes. Exprese el resultado en notación de intervalo y gráficamente.

$3(2-3x)>4(1-4x)$

$8(x+1)+1<3(2x)+1$

$2(3x-2)>3(2x-1)$

$\frac{1}{2}y + 2 \geq \frac{1}{3}y - 4$

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{3} < x$

$\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}(x-5) \leq x$

3.2 Productos notables

Los productos notables son expresiones algebraicas que siguen patrones particulares y son importantes para simplificar y resolver ecuaciones. A continuación, veremos algunos de los productos notables más comunes.

Producto de monomio por una suma algebraica

Regla: Es iguala la suma algebraica de los productos del monomio por cada término de la suma.

$$m(a+b+c)$$

Ejemplos:

1) $\boldsymbol{a(b+c-d)} = ab + ac - ad$

2) $\boldsymbol{x^2(2a+3b-c)} = 2ax^2 + 3bx^2 - cx^2$

3) $\boldsymbol{x^3(x^2-2x+3)} = x^5 - 2x^4 + 3x^3$

4) $\boldsymbol{a^2(a-b+c)} = a^3 - a^2b + a^2$

Cuadrado de un binomio

Regla: Es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplos:

1) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} = x^2 + 2x + 1$

2) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}} = x^2 + 6x + 9$

3) $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^{\mathbf{2}} = c^2 + 2cd + d^2$

4) $(\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

Regla: Es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = x^2 + 4x + 4$

2) $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}} = x^2 - 2xy + y^2$

3) $(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-\mathbf{3}\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = 4a^2 - 12x + 9b^2$

4) $(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

Producto de la suma y diferencia de dos términos

Regla: El producto de la suma de dos expresiones algebraicas por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

1) $(\boldsymbol{a}+\mathbf{2})(\boldsymbol{a}-\mathbf{2})= a^2-2a+2a-4=a^2-4$

2) $(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}\boldsymbol{y})(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{5}\boldsymbol{y})=9x^2-25y^2$

3) $(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})=x^4-y^4$

4) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{10})(\boldsymbol{x}-\mathbf{10})=x^2-100$

Producto de dos binomios que tienen un término común.

Regla: Es igual al cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes por el termino común más el producto de los términos no comunes.

$$(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

1) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})=x^2+5x+6$

2) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{4})(\boldsymbol{x}+\mathbf{5})=x^2+x-20$

3) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})=x^2-8x+15$

4) $(\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\mathbf{7}\boldsymbol{y})=x^2-4xy-21y^2$

Cubo de un binomio

Reglas: Es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ejemplos:

1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{4})^3 = a^3 + 3a^2(4) + 3a(4)^2 + 4^3 = a^3 + 12a^2 + 48a + 64$

2) $(\boldsymbol{2x}+\boldsymbol{y})^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3(2x)(y)^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + (2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{4b})^3 = a^3 + 3(a)^2 4b + 3a(4b)^2 + (4b)^3 = a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$

Reglas: Es igual al cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

1) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1})^3 = a^3 + 3a^2(1) + 3a(1)^2 + 1^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$

2) $(\boldsymbol{2x}-\boldsymbol{y^2})^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2y^2 + 3(2x)(y^2)^2 - (y^2)^3$
$= 8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6$

3) $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})^3 = x^3 - 3x^2(3) + 3x(3)^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

4) $(\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{3b})^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3$
$= 4a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

3.3 Factorización

La factorización es un proceso algebraico en el que una expresión algebraica se descompone en un producto de factores más simples.

El objetivo de la factorización es simplificar y comprender mejor las expresiones, así como encontrar soluciones a ecuaciones y resolver problemas más fácilmente.

La factorización es una herramienta importante en matemáticas y tiene varias aplicaciones, como:

Simplificación de expresiones: La factorización ayuda a reducir expresiones algebraicas complejas en formas más simples, lo que facilita su manipulación y cálculo.

Resolución de ecuaciones: Al factorizar una ecuación, se pueden identificar sus soluciones de manera más rápida y efectiva.

Identificación de patrones: La factorización puede revelar patrones o relaciones entre los términos de una expresión, lo que puede conducir a un mejor entendimiento de la relación entre las variables.

Análisis de comportamiento: En campos como la física y la ingeniería, la factorización puede ayudar a entender el comportamiento de ciertos sistemas y fenómenos.

Optimización: En problemas de optimización, la factorización puede ayudar a simplificar funciones que deben ser maximizadas o minimizadas.

Cálculo integral y diferencial: En ocasiones, la factorización puede ser útil para simplificar expresiones antes de aplicar técnicas de cálculo.

3.3.1 Métodos de factorización

Existen varios métodos y técnicas para factorizar expresiones algebraicas, y la elección del método depende de la estructura de la expresión en cuestión.

Factor común

Cuando los términos de un polinomio tienen un factor común m, el polinomio es igual al producto de este factor por el polinomio cuyos términos se obtienen dividiendo por m los términos del polinomio dado.

La operación que consiste en pasar del primer miembro al segundo miembro de la igualdad escrita se llama factor común.

$$ma + mb + mc = m(a + b + c)$$

Ejemplos:

1) $\boldsymbol{a^2 + 2a} = a(a + 2)$

2) $\boldsymbol{a^2 + ab^2} = a(a + b)$

3) $\boldsymbol{2x^2 + 4xy + 6xz} = 2x(x + 2y + 3z)$

4) $\boldsymbol{a^2b^2c^2 - a^3b^2c^3 - a^2b^3c} = a^2b^2c(c - ac^2 - b)$

5) $\boldsymbol{(x + y)a + (x + y)b + (x + y)c} = (x + y)(a + b + c)$

Diferencia de dos cuadrados

La diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de la base de estos cuadrados.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplos:

1) $\boldsymbol{b^2 - 1} = (b + 1)(b - 1)$

2) $\boldsymbol{4a^2 - 9c^2} = (2a + 3c)(2c - 3c)$

3) $\boldsymbol{9x^2 - 16} = (3x + 4)(3x - 4)$

4) $\boldsymbol{x^2 - \frac{1}{4}} = (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

5) $\boldsymbol{(a - b)^2 - c^2} = (a - b + c)(a - b - c)$

Trinomio cuadrado perfecto

Cuando dos de sus términos son cuadrados perfectos y el tercero es el doble producto de las raíces cuadradas de dichos términos.

El trinomio es el cuadrado se una sumo o de una diferencia según que el signo del doble producto sea positivo o negativo.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Ejemplo:

1) $\boldsymbol{25x^2 - 20xz + 4z^2} = (5x - 2z)^2$

2) $\boldsymbol{9a^2 + 6ab + b^2} = (3a + b)^2$

3) $\boldsymbol{a^6 - 22a^3 + 121} = (a^3 - 11)^2$

4) $\boldsymbol{4x^2 + 4x + 1} = (2x + 1)^2$

5) $\boldsymbol{(x - y)^2 + 4(x - y)z + 4z^2} = [(x - y) + 2z]^2 = (x - y + 2z)^2$

Trinomio de la forma x² + px + q

En productos notables vimos que

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Por tanto si podemos encontrar dos números a y b cuya suma algebraica sea p y cuyo producto sea q, esto es, tales que, $a + b = p \ y \ ab = q$

Se tendrá.

$$x^2 + px + q = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Ejemplo con proceso.

$$x^2 + 5x + 6$$

Escribiremos

$$x^2 + 5x + 6 = (\ )(\ )$$

Y buscaremos dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Como estos números son evidentemente +2 y +3 tendremos.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

Ejemplos:

$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{x^2 - 7x + 12} = (x-4)(x-3)$

$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{x^2 + 3x - 10} = (x+5)(x-2)$

$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{x^2 - 5x - 24} = (x-8)(x+3)$

$\mathbf{4)}\ \boldsymbol{x^2 - 8xy + 15y^2} = (x-5y)(x-3y)$

Trinomio de la forma $mx^2 + px + q$

Esta Factorización se aplica a un trinomio siempre y cuando una vez analizado no sea un trinomio cuadrado perfecto y el coeficiente del primer término sea >1.

Ejemplos.

Primer método.- Se separa el término medio en dos sumandos de modo que el polinomio resultante pueda descomponerse por agrupamiento.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{8x^2 - 37x - 15} &= 8x^2 - 40x + 3x - 15 \\
&= (8x^2 - 40x) + (3x - 15) \\
&= 8x(x-5) + 3(x-5) \\
&= (x-5)(8x+3)
\end{aligned}
$$

Para hallar los términos en que conviene descomponer el término medio, se forma el producto *mq* y se buscan dos números que multiplicados den *mq* y que sumados algebraicamente del *p*, así, se tiene mq = 8(-15) = -120 y p = -37. Los números que multiplicados dan -120 y sumados dan -37 son -40 y 3. Por tanto, el término medio -37x se escribe en la forma -40x + 3x.

Segundo método.- Se puede usar también el procedimiento siguiente: se multiplica y divide el trinomio dado por m (coeficiente de x^2), con lo que se obtiene.

$$\frac{(\boldsymbol{mx})^2 + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{mx}) + \boldsymbol{mq}}{\boldsymbol{m}}$$

Y considerando *mx* como un solo símbolo se procede a descomponer el numerador, es decir, buscando dos números que multiplicados den *mq* y que sumados del *p*.

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{4x^2 + 8x + 3} = \frac{(4x)^2 + 8(4x) + 12}{4}$$

$$= \frac{(4x+6)(4x+2)}{4}$$

$$= \frac{2(2x+3)2(2x+1)}{4}$$

$$= (2x+3)(2x+1)$$

En el primer paso se multiplica y divide el trinomio por 4, en el segundo, se procede a la descomposición en factores para lo cual se buscan los números que sumados den 8 y que multiplicados den 12, el factor 4 que se introdujo en el numerador aparece ahora repartido entre los factores. Sacando 2 factor común y simplificando se obtiene .

$$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{6x^2 - 7xy - 3y^2} = \frac{(6x)^2 - 7(6x)y - 18y^2}{6}$$

$$= \frac{(6x-9y)(6x+2y)}{6}$$

$$= \frac{3(2x-3y)2(3x+y)}{6}$$

$$= (2x-3y)(3x+y)$$

Suma y diferencia de dos cubos perfectos

Regla: La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

La suma de sus raíces cubicas

El cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Regla: La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

La diferencia de sus raíces cubicas

El cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos:

1) $\boldsymbol{x^3 + 1} = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

2) $\boldsymbol{a^3 - 8} = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

3) $\boldsymbol{27a^3 + b^6} = (3a + b^2)(9a^2 - 3ab^2 + b^4)$

4) $\boldsymbol{8x^3 - 125} = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$

3.4 Funciones polinomiales y racionales

3.4.1. Gráficas de polinomios

Las funciones polinomiales son un tipo de función matemática que se pueden expresar en la forma general:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} - 1x^{n-1} - 1 + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n≥0; $\quad$ n € ℤ; $\quad$ $a_n \neq 0$

Donde:

$f(x)$ es la función polinomial.

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{2,} a_1, a_0$ son coeficientes constantes.

x es la variable independiente.

n es el grado del polinomio, que es el exponente más alto en x.

Información clave sobre las funciones polinomiales:

Grado del polinomio: El grado del polinomio (n) determina su complejidad y cuántas soluciones reales puede tener. Si n=1, se llama función lineal; si n=2, se llama función cuadrática; si n=3, se llama función cúbica, y así sucesivamente.

Coeficientes: Los coeficientes $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{2,} a_1, a_0)$ son números constantes que afectan la forma y la posición del polinomio en el plano. Cambiar estos coeficientes puede alterar la ubicación de los ceros, la pendiente y otros aspectos de la función.

Ceros o raíces: Las raíces de una función polinomial son los valores de x que hacen que $f(x)$=0. En otras palabras, son los puntos en los que la función cruza el eje x. El número de raíces reales depende del grado del polinomio.

Comportamiento asintótico: El comportamiento de una función polinomial en los límites (cuando x tiende a infinito o menos infinito) depende del término de mayor grado en el polinomio. Por ejemplo, si el término de mayor grado es positivo, la función se elevará hacia infinito positivo o negativo, dependiendo del signo de x.

Intersección con el eje y: La intersección de la función con el eje y se produce cuando x=0. El valor de $f(0)$ es igual al coeficiente a_0.

Simetría: Las funciones polinomiales pueden exhibir simetría par o impar dependiendo de si todos los términos tienen exponentes pares o impares.

Gráficos: Los gráficos de funciones polinomiales pueden tomar diversas formas según su grado y coeficientes. Para comprender mejor su comportamiento, a menudo se utilizan gráficos.

Gráfica de funciones polinómicas

Graficar: $y = x^3 - 2x^2 - 3x$

Solución:

(y=0)

$y = x^3 - 2x^2 - 3x$

$0 = x^3 - 2x^2 - 3x$

Factorizamos (factor común)

$0 = x(x^2 - 2x - 3)$

Factorizamos (Trinomio de la forma $x^2 + px + q$)

$0 = x(x - 3)(x + 1)$

$x = 0$ $\quad x - 3 = 0$ $\quad x + 1 = 0$

$x = 3$ $\quad x = -1$

$(0; 0)$ $\quad (3; 0)$ $\quad (-1; 0)$

2) Tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-36	-10	0	0	-4	-6	0

Reemplazamos en la ecuación los valores de *x* para encontrar los valores de *y*

$y = x(x - 3)(x + 1)$

$y = -3(-3 - 3)(-3 + 1)$

$y = -3(-6)(-2) = -36$

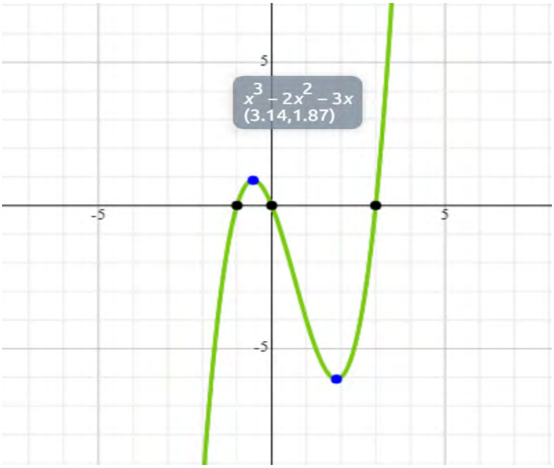
$y = x(x - 3)(x + 1)$

$y = -2(-2 - 3)(-2 + 1)$

$y = -2(-5)(-1) = -10$

Y vamos reemplazando todos los valores de *x* que se encuentran en la tabla para encontrar todos los valores de *y*.

3) Graficamos



3.4.2. Funciones racionales

Las funciones racionales, también conocidas como fraccionarias, son un tipo de función matemática que se define como el cociente de dos polinomios. En otras palabras, una función racional es una expresión de la forma:

$$f(x) = \frac{Px}{Qx}$$

Donde:

f(x) es la función racional.

P(x) es un polinomio en función de x, con coeficientes constantes.

Q(x) es otro polinomio en función de x, con coeficientes constantes, y Q(x) no es igual a cero para ningún valor de x en el dominio de la función.

Las funciones racionales pueden tomar muchas formas diferentes y pueden tener grados diferentes (el grado es el exponente más alto de la variable x en el polinomio). Pueden ser simples o complicadas, dependiendo de la expresión de P(x) y Q(x).

Aquí hay algunos ejemplos de funciones racionales:

$$1)\ f(x) = \frac{(2x+1)}{(3x-4)}$$

$$2)\ f(x) = \frac{(x^2-9)}{(x-3)}$$

$$3)\ f(x) = \frac{(4x^3+2x^2-5x)}{(2x^2+3x-2)}$$

Para analizar y graficar funciones racionales, es importante identificar sus singularidades, calcular sus asíntotas (límites en el infinito) y determinar su comportamiento general en diferentes partes del dominio. Las funciones racionales son comunes en matemáticas y se utilizan en una variedad de aplicaciones en ciencias naturales, ingeniería y otras disciplinas.

Grafica de funciones racionales

Graficar: $y = \frac{2x-5}{x-3}$

Solución.

1) encontramos las asíntotas

Vertical "eje x"

x-3≠0

x≠3 la gráfica pasa por cualquier lado, excepto por el 3

Horizontal "eje y"

$\frac{cn}{cd} = \frac{2}{1} = 2$ la gráfica pasa por cualquier lado, excepto por el 2

2) Puntos de corte "cero"

Eje x, "y=0"

$0 = \frac{2x-5}{x-3}$

$0(x-3) = 2x-5$

$0 = 2x-5$

$x = 2,5$

eje y, "x=0"

$y = \frac{2(0)-5}{0-3}$

$y = \frac{-5}{-3}$

$y = 1,67$

3) Tabla de valores.

x	1	2	4	5
y	1,5	1	3	2,5

Reemplazar en la ecuación los valores de x.

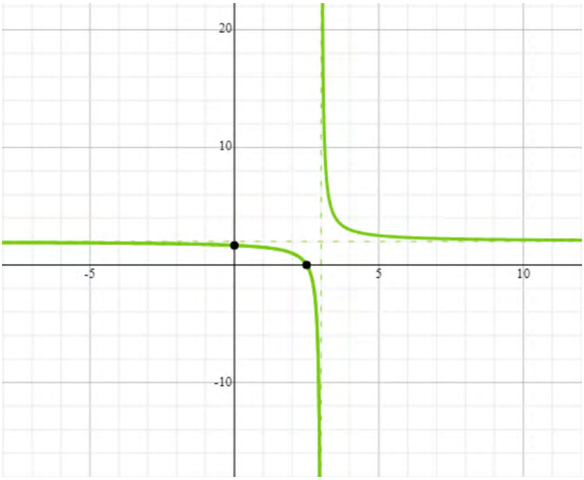
$$y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(1)-5}{1-3} = \frac{-3}{-2} = 1,5$$

$$y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(2)-5}{2-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(4)-5}{4-3} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(5)-5}{5-3} = \frac{5}{2} = 2,5$$

4) Graficar.



Conclusión

Las inecuaciones son expresiones matemáticas que describen relaciones de desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Pueden ser lineales o no lineales y se resuelven para encontrar los conjuntos de valores que satisfacen la desigualdad. Los símbolos de desigualdad incluyen "<" (menor que), ">" (mayor que), "<=" (menor o igual que) y ">=" (mayor o igual que). Las soluciones de una inecuación se representan en intervalos en la recta numérica o como conjuntos de números reales. Las inecuaciones son esenciales en la toma de decisiones, optimización de recursos y la resolución de problemas en matemáticas, economía y ciencias.

Los productos notables son patrones algebraicos que se utilizan para simplificar la multiplicación de expresiones algebraicas. Algunos ejemplos comunes incluyen el cuadrado de un binomio $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y el cuadrado de la diferencia $(a–b)^2 = a^2–2ab + b^2$. También existen patrones para el cubo de un binomio y la diferencia de cuadrados. Estos productos notables facilitan la factorización y simplificación de expresiones algebraicas complejas, lo que es fundamental en álgebra y cálculo. Los productos notables se aplican en diversas áreas, como la resolución de ecuaciones y la simplificación de polinomios.

La factorización es un proceso en matemáticas que consiste en descomponer una expresión algebraica en factores más simples. Puede aplicarse a polinomios y expresiones algebraicas para simplificar y resolver ecuaciones. Los métodos comunes de factorización incluyen factor común, factorización por agrupación, factorización de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados, entre otros. La factorización es esencial para encontrar raíces de ecuaciones, simplificar fracciones algebraicas y resolver problemas de factorización en el álgebra y cálculo. También se utiliza en áreas como la resolución de ecuaciones cuadráticas y la simplificación de expresiones matemáticas complejas.

Las funciones polinomiales y racionales son tipos de funciones algebraicas en matemáticas. Las funciones polinomiales se expresan como una suma de términos de la forma ax^n, donde "a" es una constante y "n" es un número entero no negativo. Estas funciones son suaves y continúas y se utilizan para modelar una amplia variedad de fenómenos en ciencias y matemáticas. Por otro lado, las funciones racionales son cocientes de dos polinomios y pueden tener puntos de discontinuidad llamados singularidades. Se usan para describir situaciones donde existen restricciones o divisiones, como en la física y la economía. El análisis de estas funciones es esencial en la resolución de ecuaciones y en la comprensión de comportamientos matemáticos y científicos.

Autoevaluación

Capítulo 4

Funciones Exponenciales, integrales y matrices y método de Gauss-Jordán

4.1 Funciones exponenciales y logarítmicas

4.1.1 funciones Exponenciales

Una función exponencial es un tipo de función matemática que se caracteriza por tener una variable en el exponente. La forma general de una función exponencial es:

$$y = f(x) = b^x$$

Donde:

$\boldsymbol{b} > 0$; $b \neq 1$,

f(x) es el valor de la función en el punto *x*.

b es una constante llamada "base de la exponenciación", que es un número real positivo distinto de 1.

x es la variable independiente, y puede ser cualquier número real.

Características

El dominio de la función exponencial son los números reales: Df = R

El rango de la función es: Rf = R+ , es decir el intervalo (0 ;∞)

La función tiene una asíntota horizontal que es el eje x.

Si b > 1 la función es creciente.

Si $b \in (0\ ;\ 1)$ la función es decreciente.

La característica distintiva de una función exponencial es que la variable x está en el exponente, lo que significa que crece o decrece rápidamente a medida que x cambia. La base b determina la tasa de crecimiento o decrecimiento de la función. Si b es mayor que 1, la función crece exponencialmente a medida que x aumenta, y si $0 < b < 1$, la función decrece exponencialmente a medida que x aumenta.

Las funciones exponenciales son fundamentales en matemáticas y tienen numerosas aplicaciones en ciencias naturales, economía, y otros campos, ya que describen fenómenos de crecimiento o decaimiento que son comunes en la vida real.

Cuando se trabaja con funciones exponenciales es necesario recordar las reglas de los exponentes.

Reglas de los Exponentes	
1. $b^m b^n = b^{m+n}$	2. $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$
3. $(b^m)^n = b^{mn}$	4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	6. $b^1 = b$
7. $b^0 = 1$	8. $b^{-1} = \dfrac{1}{b^n}$

Gráfico de la función exponencial

Para representar gráficamente una función exponencial, es importante considerar el método previamente utilizado para mostrar en un plano cartesiano las soluciones geométricas de ecuaciones y funciones.

Ejemplos:

Graficar las siguientes funciones exponenciales

1) $y = f(x) = 2^x$

2) $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$

En la primera función b = 2 > 0, entonces f(x) es creciente.

En la segunda función $b = \frac{1}{2}$ $\in (0\ ;\ 1)$, entonces f(x) es decreciente.

Las dos funciones tienen como asíntota horizontal al eje x.

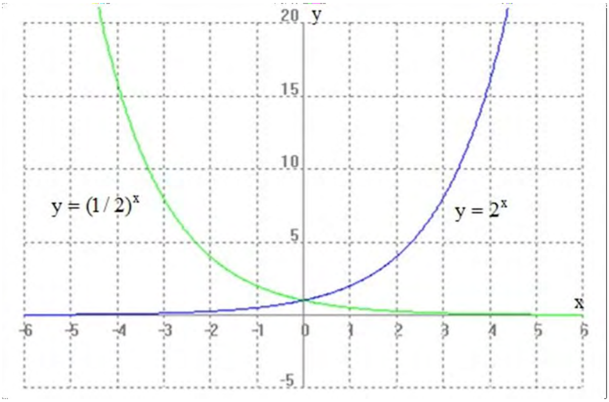
Solución:

$y = f(x) = 2^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0,063	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

$y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,063



Se observa que la primera función exhibe un comportamiento de aumento, ya que incrementa los valores de y (indicado en azul), mientras que la segunda función muestra un comportamiento de disminución, ya que cuando los valores de x aumentan, los de y disminuyen (indicado en verde)

4.1.2 Aplicaciones de las funciones exponenciales

Ejemplos:

Finanzas: Si inviertes $1,000 a una tasa de interés compuesto del 5% anual, puedes calcular el valor futuro utilizando la función exponencial $A(t)=1000\cdot(1+0.05)^t$, donde *t* es el número de años.

Solución:

$$A(t) = 1000 \cdot (1 + 0.05)^t$$

Donde:

$A(t)$ es el valor futuro de la inversión en el tiempo t.

1000 es la cantidad inicial de la inversión.

0.05 es la tasa de interés compuesto anual (5% expresado como decimal).

t es el número de años que la inversión se mantiene.

Ahora, supongamos que deseas calcular el valor futuro después de 3 años. Solo tienes que sustituir $t = 3$ en la ecuación:

$$A(3) = 1000 \cdot (1 + 0.05)^3$$

Calculamos esto:

$$A(3) = 1000 \cdot (1.05)^3$$

$$A(3) = 1000 \cdot 1{,}157625$$

$$A(3) = 1157{,}63$$

Por lo tanto, después de 3 años, tu inversión de $1,000 a una tasa de interés compuesto del 5% anual habrá crecido a $1,157.63 aproximadamente. Esto demuestra cómo la función exponencial se usa para calcular el valor futuro de una inversión con interés compuesto.

4.1.3 Función logarítmica

Una función logarítmica es un tipo de función matemática que se define en términos de un logaritmo. En particular, se utiliza el logaritmo de una variable para determinar los valores de la función. La forma general de una función logarítmica es:

$$\mathrm{f(x)} = \log_b(x)$$

Donde:

$f(x)$ es el valor de la función en el punto x.

b es la base del logaritmo, un número positivo distinto de 1.

x es la variable independiente, y debe ser un número real positivo.

La función logarítmica devuelve el exponente al que se debe elevar la base *b* para obtener *x*. En otras palabras, *f*(*x*) es igual a *y* si y solo si $b^y=x$. Esto significa que las funciones logarítmicas son inversas de las funciones exponenciales. Por ejemplo, si $f(x)=\log_{10}(100)$ entonces *f*(*x*) es igual a 2, ya que $10^2=100$.

Las funciones logarítmicas tienen propiedades útiles en matemáticas y tienen aplicaciones en una variedad de campos, como la resolución de ecuaciones exponenciales, la representación de fenómenos que se producen en escalas logarítmicas (como la medición de pH o la intensidad del sonido), y la optimización en problemas matemáticos y de ciencias, entre otros. Además, se utilizan en campos como la estadística, la ingeniería, la física y la economía para modelar una variedad de situaciones y fenómenos.

Calcular logaritmos es buscar exponentes conociendo la base y la potencia.

a) $\log_3 81 = 4, \quad porque \quad 3^4 = 81$

b) $\log_2 8 = 3, \quad porque \quad 2^3 = 8$

A partir de la observación de los ejemplos presentados, se puede inferir que es posible calcular logaritmos utilizando cualquier base. No obstante, por convención, se emplean comúnmente los logaritmos decimales, representados simplemente como "log" sin mencionar la base, así como los logaritmos naturales, basados en $e = 2.718281...$, que se indican como "ln" sin especificar la base.

Ejemplos:

Con la calculadora obtener los logaritmos de las siguientes cantidades.

a) $\log 15 = 1{,}17609$

b) $\ln 1.245 = 7{,}12689$

Utilizando la definición de logaritmo resuelva los siguientes ejercicios.

a) $\log_3 27 = y, \quad \rightarrow \quad 3^y = 27 \quad \rightarrow \quad 3^2 = 27 \quad \rightarrow \quad y = 3$

b) $\log_4 1024 = x, \quad \rightarrow \quad 4^x = 1024 \quad \rightarrow \quad 4^x = 4^5 \quad \rightarrow \quad x = 5$

c) $\log_7 50 =?, \quad \rightarrow \quad 7^x = 50.$

No es factible hallar un número entero como exponente que produzca un resultado de 50; por lo tanto, es imprescindible aplicar la propiedad de cambio de base.

$$\mathbf{\log_b x \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Lógicamente se utiliza el logaritmo que tiene en su calculadora.

$$\mathbf{\log_7 50} = \frac{\mathbf{\log 50}}{\mathbf{\log 7}} = 2{,}01038 \qquad \mathbf{\log_7 50} = \frac{\mathbf{\ln 50}}{\mathbf{\ln 7}} = 2{,}01038$$

Reglas de los Logaritmos

Emplee las leyes o propiedades de los logaritmos en los ejercicios siguientes:

Multiplicación de Logaritmos:

Reglas de los Logaritmos	
$log_b x + log_b y = log_b(x \,.\, y)$	$log_b x - log_b y = log_b\left(\frac{x}{y}\right)$
$log_b x^n = n \, log_b \, x$	$log_b 1 = 0$
$log_b b^x = x$	$b^{log_b x} = x$
$log_b x = log_b y \implies x = y$	$b^x = b^y \implies x = y$

Calcular $\log_2(4.8)$ utilizando la regla de multiplicación de logaritmos.

$\log_2(4.8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

División de Logaritmos:

Calcular $\log_{10}\frac{1000}{10}$ utilizando la regla de división de logaritmos.

$\log_{10}\frac{1000}{10} = \log_{10} 1000 + \log_{10} 10 = 3 - 1 = 2$

Potencia de Logaritmos:

Calcular $\log_3 27^2$ utilizando la regla de potencia de logaritmos.

$\log_3 27^2 = 2.\log_3 27 = 2.3 = 6$

Cambio de Base:

Calcular $\log_5 25$ en base 2 utilizando la regla de cambio de base.

$$\log_5 25 \ = \frac{\log_2 25}{\log_2 5} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Logaritmo de 1:

$\log_{10} 1 = 0$ porque el logaritmo de 1 en cualquier base es siempre igual a

Logaritmo de la Base:

$\log_e e = 1$ porque el logaritmo de la base e en sí misma es igual a 1.

Exprese como un solo logaritmo.

$$\log(x+3) - \log(y+5) + \log(z-1) = \log\frac{(x+3)}{(y+5)} + \log(z-1)$$

$$= \log\frac{(x+3)(z-1)}{(y+5)}$$

Características.

El conjunto de números reales positivos constituye el dominio de la función logarítmica: Df = (0 ; ∞).

El rango de la función abarca todos los números reales: Rf = R.

La función presenta una línea vertical de referencia en el eje Y. Esto se refleja en f(1) = 0 y f(b) = 1.

Cuando b es mayor que 1, la función muestra un aumento(-creciente).

Cuando b está en el intervalo (0;1), la función exhibe un descenso(decreciente).

Es importante recordar ciertas nociones sobre logaritmos y sus reglas al trabajar con funciones logarítmicas.

Gráfico de la función logarítmica

Al trazar la representación gráfica de una función logarítmica, es importante aplicar el procedimiento previamente empleado para mostrar en un sistema de coordenadas cartesianas las representaciones geométricas de ecuaciones y funciones.

Ejemplos

Graficar las siguientes funciones logarítmicas

1) $y = (x) = log_3 x$

2) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

El dominio de las funciones se extiende desde 0 hasta el infinito: Df = (0 , ∞).

El rango de las funciones abarca todos los números reales: Rf = R.

En la primera función, dado que b = 3 > 0, f(x) muestra un aumento(creciente).

En la segunda función, dado que b = 1/3, que se encuentra en el intervalo de (0 ; 1), f(x) experimenta una disminución (decreciente).

Ambas funciones presentan como asíntota vertical al eje y.

Solución:

$$y = f(x) = log_3 x \quad Transforme\ a\ exponencial \quad x = 3^y$$

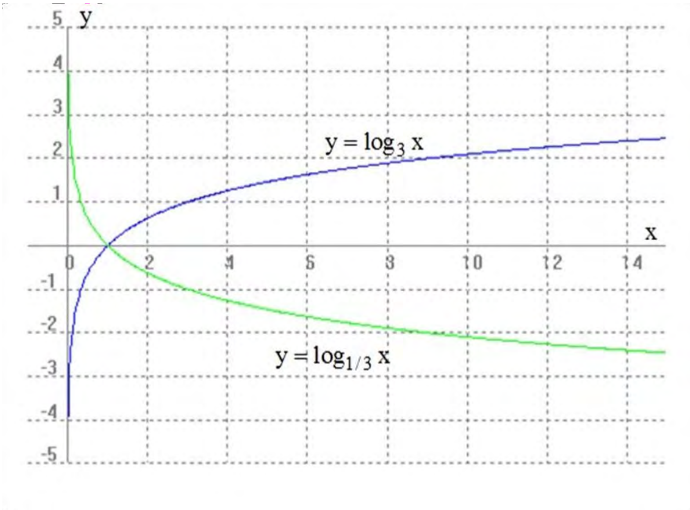
Asigne valores a la y para encontrar los de x, registre los datos en la tabla

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0,012	0,037	0,111	0,333	1	3	9	27	81

$$y = f(x) = x \ Transforme\ a\ exponencial\ x = (\tfrac{1}{3})^y$$

Asigne valores a la y para encontrar los de x, registre los datos en la tabla

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,012



Aplicaciones de la función logarítmica

Un banco proporciona una tasa de interés anual del 6% en cuentas de ahorro que requieren un depósito mínimo de $1,000 y aplican capitalización anual. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la cantidad de dinero inicial de $1,000 se duplique? Además, ¿en cuánto tiempo se duplicaría la cantidad inicial de $1,000 si la tasa de interés anual fuera del 8%?

Datos:

$P = \$\ 1.000$
$S = \$\ 2.000$
$r = 6\%$
$n = ?$
Fórmula: $S = P(1 + r)\ n$

Solución:

$$2000 = 1000(1 + 0{,}06)^n$$

Para despejar n, primero se divide ambos lados de la ecuación para 1.000

$$\frac{2000}{1000} = \frac{1000(1 + 0{,}06)^n}{1000}$$

$$2 = 1.06^n$$

Se aplican logaritmos en los dos miembros de la ecuación.

$$\ln 2 = \ln(1{,}06)^n$$

$$\ln 2 = \mathrm{n.}\ln 1{,}06$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}06} \approx 11{,}9\ años$$

4.2. Integrales

Diferenciamos una función y obtuvimos otra función que era su derivada. El cálculo integral se ocupa del proceso inverso. Dada la derivada de una función se debe encontrar la función original. La necesidad de hacer esto surge de manera natural. Por ejemplo, podemos tener una función de ingreso marginal y querer encontrar la función de ingreso a partir de ella. El cálculo integral también involucra un concepto de límite que nos permite determinar el límite de un tipo especial de suma, cuando el número de términos en la suma tiende a infinito. ¡Ésta es la verdadera fuerza del cálculo integral! Con él podemos calcular el área de una región que no pueda encontrarse con algún otro método conveniente.

4.2.1. Indefinida

Dada una función f, si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces F se llama antiderivada de f. Así, una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por la diferencial dx resulta F'(x)dx=f(x)dx. Sin embargo, como F'(x)dx es la diferencial de F,se tiene que dF=f(x)dx. De aquí que podemos considerar una antiderivada de f como una función cuya diferencial es f(x)dx

Definición

Una antiderivada de una función f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x)$$

o en forma equivalente, en notación diferencial,

$$dF = f(x)dx$$

Por ejemplo, como la derivada de x2 es 2x, x2 es una antiderivada de 2x. Sin embargo, no es la única antiderivada de 2x, ya que,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \quad y \quad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x$$

tanto x2 + 1 como x2 + 5también son antiderivadas de 2x. De hecho, es claro que como la derivada de una constante es cero, x^2 + C es también una antiderivada de 2x para cualquier constante C. Así, 2x tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante, es que todas las antiderivadas de 2x deben ser funciones de la forma x^2 + C, debido al siguiente hecho:

Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de 2x, podemos referirnos a ella como la antiderivada más general de 2x, denotada por $\int 2xdx$ que se lee “integral indefinida de 2x con respecto a x”. Así, escribimos

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

El símbolo $\int$ se llama símbolo de integración, 2x es el integrando y C la constante de integración. La dx es parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la variable de integración.

En forma más general, la integral indefinida de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)dx$ y denota la antiderivada más general de f.

Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante, si F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)dx = F(x) + C, donde\ C\ es\ una\ constante$$

$integrar\ f\ significa\ encontrar \int f(x)dx.$ En resumen,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad si\ y\ solo\ si\quad F'(x) = f(x)$$

$Encontrar \int 5dx$

Solución:

Como sabemos que la derivada de 5x es 5, 5x es una antiderivada de 5. Por tanto,

$$\int 5dx = 5x + C$$

Fórmulas básicas de integración

1. $\int kdx = kx + C, \quad k \text{ es una constante}$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante}$

5. $\int [f(x) \neq g(x)]dx = \int f(x)dx \neq \int g(x)dx\,.$

Ejemplos.

$$\int \mathbf{5}\, \boldsymbol{dx} = \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

$$\int \mathbf{7}\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} \boldsymbol{dx} = \mathbf{7}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5+1}}}{\mathbf{5+1}} + \boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{6}} + \boldsymbol{C}$$

Integral de una constante.

$FORMULA\text{:} \int kdx = kx + C$

Ejemplos:

1. $\int 2dx = 2\int d\,x = 2x + C$

2. $\int \frac{3}{4}dx = \frac{3}{4}\int d\,x = \frac{3}{4}x + C$

3. $\int 5dx = 5\int d\,x = 5x + C$

4. $\int \pi dx = \pi \int d\,x = \pi x + C$

5. $\int xdx = \;\; x\ no\ es\ constante\ porque\ no\ es\ un\ numero.$

6. $\int \frac{dx}{5} = \frac{1}{5}\int d\,x = \frac{1}{5}x + C$

Ejemplos:

Integral de x elevado a la n

$$\boldsymbol{FORMULA}: \int \boldsymbol{x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

$$\mathbf{1.} \int \boldsymbol{x^3 dx} = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\mathbf{2.} \int \boldsymbol{x^5 dx} = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

$$\mathbf{3.} \int \boldsymbol{x^7 dx} = \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{x^8}{8} + C$$

$$\mathbf{4.} \int \boldsymbol{t^4 dx} = \frac{t^{4+1}}{4+1} + C = \frac{t^5}{5} + C$$

$$\mathbf{5.} \int \boldsymbol{x^{-3} dx} = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{x^{-2}}{2} + C$$

$$\mathbf{6.} \int \boldsymbol{\frac{3}{x^3} dx} = \int 3x^{-3} dx = 3 \int x^{-3} dx = 3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{3x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{x^2} + C$$

$$\mathbf{7.} \int \boldsymbol{\frac{dx}{x^2}} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\mathbf{8.} \int \boldsymbol{\frac{2dx}{x^3} = 2} \int x^{-3} dx = 2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{2x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{x^2} + C$$

Integral de un polinomio.

1. $\int (\mathbf{2x^3 + 5x^2 - 2x + 1})\boldsymbol{dx} = \int 2x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int 2xdx + \int 1dx$

$$= 2\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 2\int xdx + \int dx$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} + 5\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + x + C$$

$$= \frac{2x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C$$

$$= \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - x^2 + x + C$$

2. $\int (\boldsymbol{x^5 - 2x^3})\boldsymbol{dx} = \int x^5 dx - \int 2x^3 dx$

$$= \frac{x^{5+1}}{5+1} - 2\frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{2x^4}{4} + C$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{2} + C$$

3. $\int (\boldsymbol{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - \frac{x}{2} + 3})\boldsymbol{dx}$

$$= 3\int x^4\, dx - 4\int x^3\, dx + 6\int x^2\, dx - \frac{1}{2}\int x\, dx + 3\int dx$$

$$= \frac{3x^5}{5} - \frac{4x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$= \frac{3x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - \frac{x^2}{4} + 3x + C$$

Integral de una multiplicación

1) $\int \boldsymbol{3x^2(2x^2-5)dx} = \int (6x^4 - 15x^2)dx$

$$= 6\int x^4dx - 15\int x^2dx$$

$$= \frac{6x^5}{5} - \frac{15x^3}{3} + C$$

$$= \frac{6x^5}{5} - 5x^3 + C$$

2) $\int \boldsymbol{2x^3\left(x^3-2x^2+x+3\right)dx} = \int (2x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 6x^3)dx$

$$= 2\int x^6dx - 4\int x^5\,dx + 2\int x^4\,dx + 6\int x^3\,dx$$

$$= \frac{2x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} + C$$

$$= \frac{2x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + C$$

4.4.1 Definida

Una integral definida suele producir un valor; a diferencia de una integral indefinida, que produce una función.

Las integrales definidas se representan de la misma manera que las indefinidas, pero los límites se añaden como subíndice y superíndice en el signo de integración.

Teorema fundamental del cálculo integral. Si f es continua en el intervalo [a, b] y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Fórmulas:

$$\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}}$$

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Por ejemplo, si queremos integrar, x^2 entre los límites 5 y 8, la notación correspondiente sería:

$$\int_5^8 x^2 dx$$

Calcular integrales definidas

¿Cómo se resuelven estas integrales? Para realizar el cálculo de integrales definidas, sigue el siguiente procedimiento:

Escribe la integral definida con sus límites en la forma

$$\int_a^b f(x)dx$$

Integra la función $f'(x)$ de la misma manera en la que lo harías en una integral indefinida para encontrar $f(x)$

No incluyas la constante de integración, C.

Escribe el resultado en la forma $[f(x)_a^b]$

Ahora, evalúa $f(x)$ entre los límites dados y resta los valores: $f(b)–f(a)$

Ejemplos:

1) $\int_1^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

2) $\int_2^3 x dx = [\frac{x^2}{2}]_2^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$

3) $\int_3^5 2x dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^5 = \frac{2(5)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{50}{2} - \frac{18}{2} = \frac{32}{2} = 16$

4) $\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} (\mathbf{2x^2 - 3x + 5}) \boldsymbol{dx} = 2\int x^2 dx - 3\int x\, dx + \int dx$

$$= [\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x]_1^3$$

$$= \frac{2(3)^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2} + 5(3) - [\frac{2(1)^3}{3} - \frac{3(1)^2}{2} + 5(1)]$$

$$= \frac{54}{3} - \frac{27}{2} + 15 - [\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5]$$

$$= 18 - \frac{27}{2} + 15 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 5]$$

$$= \frac{108 - 81 + 90 - 4 + 9 - 30}{6}$$

$$= \frac{92}{6} = \frac{46}{3}$$

4.3 Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular que consiste en *m* renglones o filas y *n* columnas; denotada con una letra mayúscula y es una matriz de tamaño u orden *mxn*.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ : & : & \dots & \dots & : \\ : & : & \dots & \dots & : \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Se conoce como matriz de m*n o matriz de orden m*n. Para la entrada *aij*, llamamos a *i* el subíndice del renglón *y* a *j* el subíndice de la columna.

El número de entradas en una matriz de *m x n* es *mn*. Por brevedad, una matriz de m x n puede denotarse por el símbolo $[a_{ij}]_{mxn}$ o de manera más sencilla $[a_{ij}]$, donde el orden se entiende que es el apropiado para el contexto dado. Esta notación sólo indica qué tipos de símbolos se utilizan para denotar la entrada general.

Para ubicar cualquier elemento de una matriz, se designa a i para la fila o renglón y con j para la columna (a_{ij})

Una matriz que tiene exactamente un renglón, tal como la matriz de 1x4

$A = [1\ 7\ 12\ 3]$

Se llama matriz renglón o vector renglón.

Una matriz que consiste en una sola columna como la matriz de 5x1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Se llama matriz columna o vector columna.

Ejemplo 1

Orden (o tamaño) de una matriz.

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ tiene orden 1x3

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ tiene tamaño 3x2

La matriz $[7]$ tiene orden 1x1

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene orden 3x5

Igualdad de matrices

Ahora definimos lo que significa decir que dos matrices son iguales.

Definición

Las matrices y son iguales si y sólo si tienen el mismo orden y aij=bij para cada i y cada j (esto es, entradas correspondientes son iguales).

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{2}{2} \\ 2.3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Pero,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (diferentes tamaños)

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Igualando las entradas correspondientes, debemos tener.

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y + 1 &= 7 \\ 2z &= 4 \\ 5w &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene x=2, y=6, z=2, $w = \frac{2}{5}$. Es un hecho significativo que una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones lineales.

Transpuesta de una matriz

Si A es una matriz, la matriz que se forma a partir de A por intercambio de sus renglones con sus columnas se conoce como la transpuesta de A.

Definición

La transpuesta de una matriz A de mxn, denotada A^T, es la matriz de nxm cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de A.

Ejemplo:

$$si\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, encontrar\ A^T$$

Solución: la matriz A es de 2 x 3, de modo que A^T es de 3 x 2. La columna 1 de A se convierte en el renglón 1 de A^T, la columna 2 se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por tanto,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Observe que las columnas de A^T son los renglones de A. Debe darse cuenta de que si tomamos la transpuesta de nuestra respuesta, obtendremos la matriz original A. Esto es, la operación transpuesta tiene la propiedad de que

$$(A^T)^T = A$$

4.3.1 Operaciones con Matrices

Suma de matrices y multiplicación por un escalar

Suma de matrices.

La suma de matrices es una operación fundamental en la teoría de matrices y en las matemáticas en general. Para sumar dos matrices, deben cumplir con la misma dimensión, es decir, tener el mismo número de filas y columnas. La suma se realiza sumando los elementos correspondientes de ambas matrices y colocando el resultado en la misma posición en la matriz resultante.

Definición

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ y son matrices de m x n, entonces la suma A+B es la matriz de m x n que se obtiene sumando las correspondientes entradas de A y B; esto es, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Ejemplo:

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

Como A y B son del mismo tamaño (2 x 3), su suma está definida. Tenemos

$$A+B=\begin{bmatrix}3+5 & 0+(-3) & -2+6\\ 2+1 & -1+2 & 4+(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -3 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$2)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}\ y\ B=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -6 & 4\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+7 & 2-2\\ 3-6 & 4+4\\ 5+3 & 6+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ -3 & 8\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

Propiedades para la suma de matrices

1. A + B = B + A (propiedad conmutativa),

2. A + (B + C) = (A + B) + C (propiedad asociativa),

3. A + O = O + A = A (propiedad del neutro aditivo).

La propiedad 1 establece que las matrices pueden sumarse en cualquier orden, y la propiedad 2 permite que las matrices se agrupen para la operación de suma. La propiedad 3 establece que la matriz cero desempeña la misma función en la suma de matrices que el número cero en la suma de números reales.

Ejemplos.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

Propiedad conmutativa

Demostrar que A + B = B + A

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2}\end{bmatrix}\quad ; \qquad \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

Por tanto; A + B = B + A

Propiedad asociativa

Demostrar que A + (B + C) = (A + B) + C

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ -1 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ -1 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

Propiedad del neutro aditivo

Demostrar que A + O = A

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$$

Multiplicación por un escalar

Es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de la matriz A de orden *mxn* por un número real k, obteniéndose una matriz kA de orden *mxn*.

Ejemplo: Realice las operaciones matriciales.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

-2A

$$-2A=-2\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 8 & -2\end{bmatrix}$$

3C − 2B + A

$$3\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 9 & 15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -5\\ 7 & 6\end{bmatrix}$$

Sean A, B y O matrices del mismo orden de mxn y k, l números reales, las siguientes propiedades se cumplen para la multiplicación de las matrices por un escalar.

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$(k + l)A = kA + lA$$

$$k(lA) = (kl)A$$

$$OA = O$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$kO = O$$

$$(kA)^T = kA^T$$

Producto matricial.

Sean A una matriz de mxn y B una matriz de nxp. El producto AxB es la matriz C de orden mxp. En otras palabras existe producto matricial si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Cada entrada de C se obtiene de la suma de los productos de las entradas de la fila de la primera matriz con las entradas de la columna de la segunda matriz.

Ejemplo: Realice las operaciones matriciales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

A.B

$$AB = \begin{bmatrix} 1(3) + (-2)(5) + 1(4) & 1(2) + (-2)(-1) + 1(-3) \\ 0(3) + 2(5) + 4(4) & 0(2) + 2(1) + 4(-3) \\ -2(3) + 3(5) + 1(4) & (-2)(2) + 3(1) + (-3) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 26 & -10 \\ 13 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

H = A. B − 2C

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 \\ -4 & 11 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 9 \\ -4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices satisface las propiedades siguientes, siempre y cuando las sumas y los productos estén definidos.

A(BC) = (AB)C

A(B + C) = AB + AC

(A + B)C = AC + BC

4.3.2 Matriz Inversa

El método es aplicable únicamente cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, es decir la matriz de coeficientes es una matriz cuadrada.

Recuerde una ecuación matricial se expresa como: $\mathbf{A}.\ \mathbf{X} = \mathbf{B}$, la solución de la ecuación matricial consiste en encontrar la matriz de incógnitas X, que viene dado por: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\ \mathbf{B}$; dónde:

X = Matriz de incógnitas

A^{-1} = Matriz inversa de A (coeficientes)

B = Matriz de términos independientes.

Para invertir la matriz A, formamos la matriz A/I, que consiste en la matriz A(coeficientes) y la matriz I(identidad); por medio de operaciones sobre los renglones transformamos la matriz A en I y simultáneamente la matriz I se convierte en $\mathbf{A}^{-1}$.

Ejemplo:

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de la matriz inversa.

$x + 4y + 3z = 10$

$4x + 2y - 2z = -2$

$3x - y + z = 11$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 4 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix} \mathrm{I} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}-4R_1 + 2R_2\\ -3R_1 + R_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & -14 & -14\\ 0 & -13 & -8\end{bmatrix} \mathrm{I} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{14}R_2 \begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -13 & -8\end{bmatrix} \mathrm{I} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}-4R_2 + R_1\\ 13R_2 + R_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \mathrm{I} \begin{bmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0\\ \frac{5}{7} & -\frac{13}{14} & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5}R_3 \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \mathrm{I} \begin{bmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0\\ \frac{1}{7} & -\frac{13}{14} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_3 + R_1\\ -R_3 + R_2\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \mathrm{I} \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{7} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{7} & -\frac{13}{70} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{7} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{7} & -\frac{13}{70} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}10\\ -2\\ 11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}$$

Solución: **x = 2** **y = −1** **Z = 4**

4.4 Método de Gauss- Jordán

4.4.1 Definiciones generales

El método de Gauss-Jordan es una técnica utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales y encontrar la forma reducida por filas de una matriz (también conocida como forma escalonada reducida por filas o RREF, por sus siglas en inglés). Este método es una extensión del método de eliminación de Gauss y es especialmente útil cuando se necesita encontrar la inversa de una matriz o cuando se desea resolver un sistema de ecuaciones lineales con múltiples incógnitas.

El objetivo del método de Gauss-Jordan es llevar la matriz original a una forma en la que todas las filas con coeficientes no nulos comiencen con un 1 en su columna principal, y todas las demás entradas en esa columna sean iguales a cero. Aquí están los pasos generales del método:

4.7.2 Ejercicios

Ejemplo 1.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones de 3x3, por el método de Gauss Jordan.

$x - y + 3z = 13$

$x + y + z = 11$

$2x + 2y - z = 7$

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F2-F1 \\ F3-2F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & -19 \end{array}\right)$$

$$F3-2F2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F1+F3 \\ 3F2-2F3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

$$6F1+F2\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 6 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F1/6 \\ F2/6 \\ F3/-3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Sol: x=2 y=4 z=5

Comprobación

Reemplazamos estos valores en cualquier ecuación de nuestro sistema de ecuaciones.

$x-y+3z=13$	$x+y+z=11$	$2x+2y-z=7$
$2-4+15=13$	$2+4+5=11$	$4+8-5=7$
$13=13$	$11=11$	$7=7$

Ejemplo 2.

$x + y + z = -6$

$2x + y - z = -1$

$x - 2y + 3z = -6$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F2 - 2F1 \\ F3 - F1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F3 - 3F2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -11F1 + F3 \\ 11F2 + 3F3 \end{array} \begin{pmatrix} -11 & -11 & 0 & 33 \\ 0 & -11 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 11 & -33 \end{pmatrix}$$

$$F1 - F2 \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -11 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 11 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F1/-11 \\ F2/-11 \\ F3/11 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Sol: x=-1 y=-2 z=-3

4.5 Conclusión

- Las funciones exponenciales tienen la forma f(x) = a^x, donde "a" es una constante positiva y "x" es la variable. Estas funciones crecen o decrecen rápidamente y son útiles para modelar crecimiento exponencial, como el interés compuesto o la población. Las funciones logarítmicas son inversas de las exponenciales y se escriben como f(x)

= log_a(x), donde "a" es la base del logaritmo. Los logaritmos se utilizan para resolver ecuaciones exponenciales y para medir relaciones proporcionales en una escala logarítmica, como la escala pH o la medición de decibelios.

- Tanto las funciones exponenciales como las logarítmicas desempeñan un papel crucial en ciencias, ingeniería y matemáticas, y se aplican en problemas relacionados con el crecimiento, decaimiento, y análisis de datos.
- Las integrales son conceptos fundamentales en cálculo matemático. Representan el área bajo una curva en un gráfico de función y se utilizan para calcular acumulaciones y tasas de cambio. Existen dos tipos principales: la integral definida, que encuentra la acumulación de una función en un intervalo específico, y la integral indefinida, que encuentra una función primitiva o antiderivada de una función dada. El teorema fundamental del cálculo relaciona estas dos formas de integración y permite calcular integrales definidas mediante antiderivadas. Las integrales tienen aplicaciones en física, estadísticas, economía y muchas otras disciplinas para resolver problemas de optimización, análisis de áreas y volúmenes, y modelización matemática.
- Las matrices son arreglos bidimensionales de números organizados en filas y columnas. Se utilizan en álgebra lineal y matemáticas para representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales. Las operaciones comunes con matrices incluyen la suma, la multiplicación y la inversión. Las matrices pueden representar transformaciones lineales y tienen aplicaciones en geometría, física y programación. La multiplicación de matrices es no conmutativa y sigue reglas específicas. Las matrices cuadradas tienen determinantes que se utilizan para encontrar soluciones únicas y determinar si un sistema de ecuaciones es con-

sistente. Las matrices son fundamentales en el procesamiento de imágenes, la resolución numérica y la simulación de sistemas.

- El método de Gauss-Jordán es una técnica de eliminación en álgebra lineal que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales y encontrar la matriz inversa de una matriz cuadrada. Se busca transformar una matriz aumentada a su forma escalonada reducida, donde se obtienen ceros por debajo y por encima de las principales entradas diagonales. Esto permite encontrar las soluciones de un sistema lineal directamente. Además, si se aplica a una matriz cuadrada, puede encontrar su inversa si existe. El método de Gauss-Jordán es una herramienta poderosa en el álgebra lineal y se utiliza en la resolución numérica de sistemas de ecuaciones y en la inversión de matrices en diversas aplicaciones matemáticas y científicas.

Autoevaluación

Referencias

Acuña, P. (2012). *Lógica formal*. UNI-FAUA.

Arya, J., y Lardner, R. (2002). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía.* (4ta. ed.). Pearson Educación.

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2da. ed.). Patria.

Becerra, F. (2009). *Lógica matemática.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ernest, F., y Richard, S. (2003). *Matemáticas para Administración y Economía*. (10ma. ed.). Pearson Educación.

García, O. (2003). *Introducción a la lógica*. UNMSM.

Grossman, S.I., & Flores Godoy, J.J. (1995). *Álgebra lineal.* (3ra. ed.). McGraw-Hill.

Huerta, A., y Manzano, M. (2002). *Teoría de conjuntos*. Universidad Complutense de Madrid – UCM.

Montero, J.M. (s.f.). *Lenguajes naturales y lenguajes formales.* Universidad Politécnica de Madrid

Napolitano, A. (2012). *Lógica matemática*. (2da. ed.). Biosfera.

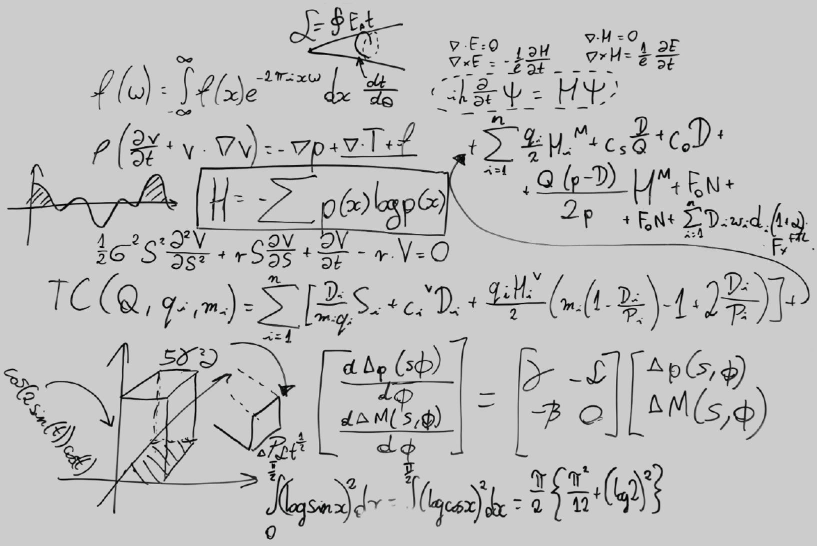
Rojo, J., y Martín, I. (1994). *Ejercicios y problemas de álgebra lineal* (6ta. ed.). McGraw-Hill.

Santizo, J., y García, J. (2009). *Teoría de conjuntos.* Universidad Nacional Autónoma de México-UNAM.

Religación
Press
Ideas desde el Sur Global

Religación Press
Ideas desde el Sur Global

Instituto Nelson Torres



ISBN: 978-9942-642-46-2