María Cristina Ramírez Carrasco
Diana Judith Quintana Sánchez
Sara Luz Chunga Palomino
Hebert Córdova Guerrero
Luis Vicente Mejía Alemán

Gráficos que hablan.
Una nueva forma de aprender Geometría Analítica

Religación
Press

María Cristina Ramírez Carrasco | Diana Judith Quintana Sánchez | Sara Luz Chunga Palomino | Hebert Córdova Guerrero | Luis Vicente Mejía Alemán

Gráficos que hablan

Una nueva forma de aprender Geometría Analítica

Quito, Ecuador
2025

María Cristina Ramírez Carrasco | Diana Judith Quintana Sánchez | Sara Luz Chunga Palomino | Hebert Córdova Guerrero | Luis Vicente Mejía Alemán

Talking Graphs

A new way to learn Analytic Geometry

Quito, Ecuador
2025

Religación **P**ress
[Ideas desde el Sur Global]

Religación Press, es parte del fondo editorial del Centro de Investigaciones CICSHAL-RELIGACIÓN | Religación Press, is part of the editorial collection of the CICSHAL-RELIGACIÓN Research Center | Diseño, diagramación y portada | Design, layout and cover: Religación Press.
CP 170515, Quito, Ecuador. América del Sur.
Correo electrónico | E-mail: press@religacion.com
www.religacion.com

Disponible para su descarga gratuita en | Available for free download at | https://press.religacion.com

CITAR COMO [APA 7]

Ramírez Carrasco, M. C., Quintana Sánchez, D. J., Chunga Palomino, S. L., Córdova Guerrero, H., y Mejía Alemán, L. V. (2025). *Gráficos que hablan. Una nueva forma de aprender Geometría Analítica*. Religación Press. https://doi.org/10.46652/ReligacionPress.304

Derechos de autor | Copyright: Religación Press, María Cristina Ramírez Carrasco, Diana Judith Quintana Sánchez, Sara Luz Chunga Palomino, Hebert Córdova Guerrero, Luis Vicente Mejía Alemán
Primera Edición | First Edition: 2025
Editorial | Publisher: Religación Press
Materia Dewey | Dewey Subject: 370.7 - Estudio y enseñanza de la educación
Clasificación Thema | Thema Subject Categories: PBF - Álgebra
BISAC: MAT012000
Público objetivo | Target audience: Profesional / Académico | Professional / Academic
Colección | Collection: Educación
Soporte| Format: PDF / Digital
Publicación | Publication date: 2025-07-21
ISBN: 978-9942-561-48-0
Título: Gráficos que hablan. Una nueva forma de aprender Geometría Analítica
Talking Graphs: A New Way to Learn Analytic Geometry
Gráficos Que Falam: Uma Nova Forma de Aprender Geometria Analítica

Nota obra derivada: El libro retoma y amplía, mediante el trabajo colaborativo de un grupo de investigadores, los hallazgos y aportes presentados en la tesis original, enriqueciendo su contenido con nuevos enfoques, análisis y perspectivas que profundizan en los temas abordados “El software GeoGebra y la comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de economía de la Universidad Nacional de Piura, 2024” presentada ante la Universidad Nacional de Piura por María Cristina Ramírez Carrasco en 2025.
Note: The book takes up and expands, through the collaborative work of a group of researchers, the findings and contributions presented in the original dissertation, enriching its content with new approaches, analyses and perspectives that deepen the topics addressed. “El software GeoGebra y la comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de economía de la Universidad Nacional de Piura, 2024” presented to the Universidad Nacional de Piura by María Cristina Ramírez Carrasco in 2025.

Revisión por pares

La presente obra fue sometida a un proceso de evaluación mediante el sistema de dictaminación por pares externos bajo la modalidad doble ciego. En virtud de este procedimiento, la investigación que se desarrolla en este libro ha sido avalada por expertos en la materia, quienes realizaron una valoración objetiva basada en criterios científicos, asegurando con ello la rigurosidad académica y la consistencia metodológica del estudio.

Peer Review

This work was subjected to an evaluation process by means of a double-blind peer review system. By virtue of this procedure, the research developed in this book has been endorsed by experts in the field, who made an objective evaluation based on scientific criteria, thus ensuring the academic rigor and methodological consistency of the study.

Sobre los autores/ About the authors

María Cristina Ramírez Carrasco
Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú
https://orcid.org/0000-0002-6330-7232
mramirezc@unp.edu.pe
mcristinarc615@gmail.com
Doctora en Ciencias de la Educación, Magíster en Matemática Aplicada y matemática de profesión. Catedrática en la Universidad Nacional de Piura con amplia experiencia en la enseñanza universitaria. Interesada en la investigación científica orientada al fortalecimiento de los procesos educativos.

Diana Judith Quintana Sánchez
Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú
https://orcid.org/0000-0002-6864-8191
dquintanas@unp.edu.pe
diana.judith.quintana@gmail.com
Doctora en Ciencias de la Educación y Magíster en Educación con mención en Matemática. Evaluadora de ICACIT. Catedrática de pregrado y posgrado en la UNP, miembro de la Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática y de la Red Iberoamericana sobre Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas. Jefa de la Unidad de Gestión Académica de la UNP (2022-2024).

Sara Luz Chunga Palomino
Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú
https://orcid/0000-0002-9314-4964
schungap@unp.edu.pe
gimfissari@gmail.com
Doctora en Ciencias de la educación, Magíster en física médica y físico de profesión. Catedrático en la Universidad Nacional de Piura, con amplia experiencia en la enseñanza e interés por la investigación científica; deseo de superación; visión de cambio y nuevos retos.

Hebert Córdova Guerrero
Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú
https:/orcid.org/0000-0002-4953-3452
hebcordgue@gmail.com
Ingeniero Industrial y Egresado de la Maestría en Ingeniería Industrial por la Universidad Nacional de Piura. Además, soy Licenciado en Educación con especialidad en Física y Matemática, Cuento con experiencia en el ámbito educativo, tanto en la enseñanza de ciencias exactas como en la orientación de proyectos académicos.

Luis Vicente Mejía Alemán

Universidad Nacional de Piura | Piura | Perú
https://orcid.org/0000-0003-4495-9961
lmejiaa@unp.edu.pe
luis.mejia.aleman@gmail.com

Doctor en Ciencias de la Educación y Magíster en Docencia Universitaria, Licenciado y Bachiller en Matemáticas y Bachiller en Educación por la Universidad Nacional de Piura. Profesor Principal en la Escuela Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura.

Resumen

En la Universidad Nacional de Piura, muchos estudiantes enfrentan dificultades para aprobar cursos de matemáticas, especialmente Geometría Analítica. Las altas tasas de desaprobación reflejan un problema complejo: algunos alumnos llegan sin bases sólidas, otros se desmotivan ante métodos de enseñanza tradicionales, y los docentes, con aulas sobrecargadas, tienen poco espacio para innovar. Esta situación no solo afecta el rendimiento académico, sino que puede llevar al abandono de los estudios. Frente a este desafío, surge una propuesta: integrar herramientas digitales como GeoGebra para transformar el aprendizaje. Este software permite visualizar conceptos abstractos, como la hipérbola, de manera dinámica, conectando fórmulas con gráficos y lenguaje matemático. ¿Puede esta estrategia mejorar la comprensión y comunicación de ideas matemáticas? Este libro explora esa posibilidad, combinando teoría pedagógica con una experiencia práctica aplicada en estudiantes de Economía, buscando nuevas formas de hacer que las matemáticas sean menos intimidantes y más accesibles.

Palabras claves:
Geometría Analítica, Aprendizaje significativo, GeoGebra, Representación gráfica, Innovación educativa.

Abstract

At the Universidad Nacional de Piura, many students face difficulties in passing mathematics courses, especially Analytic Geometry. The high failure rates reflect a complex problem: some students arrive without a solid foundation, others are demotivated by traditional teaching methods, and teachers, with overloaded classrooms, have little room to innovate. This situation not only affects academic performance, but can also lead to students dropping out of school. Faced with this challenge, a proposal arises: to integrate digital tools such as GeoGebra to transform learning. This software allows visualizing abstract concepts, such as the hyperbola, in a dynamic way, connecting formulas with graphics and mathematical language. Can this strategy improve the understanding and communication of mathematical ideas? This book explores that possibility, combining pedagogical theory with applied practical experience with economics students, seeking new ways to make mathematics less intimidating and more accessible.

Keywords:
Analytic Geometry, Meaningful learning, GeoGebra, Graphical representation, Educational innovation.

Resumo

Na Universidade Nacional de Piura, muitos alunos enfrentam dificuldades para passar nos cursos de matemática, especialmente em Geometria Analítica. As altas taxas de reprovação refletem um problema complexo: alguns alunos chegam sem uma base sólida, outros são desmotivados pelos métodos tradicionais de ensino e os professores, com salas de aula sobrecarregadas, têm pouco espaço para inovação. Essa situação não só afeta o desempenho acadêmico, mas também pode levar os alunos a abandonarem a escola. Diante desse desafio, surge uma proposta: integrar ferramentas digitais como o GeoGebra para transformar o aprendizado. Esse software possibilita a visualização de conceitos abstratos, como a hipérbole, de forma dinâmica, conectando fórmulas com gráficos e linguagem matemática. Essa estratégia pode melhorar a compreensão e a comunicação das ideias matemáticas? Este livro explora essa possibilidade, combinando teoria pedagógica com experiência prática aplicada a estudantes de economia, buscando novas maneiras de tornar a matemática menos intimidadora e mais acessível.

Palavras-chave:
Geometria analítica, Aprendizagem significativa, GeoGebra, Representação gráfica, Inovação educacional.

Contenido

Revisión por pares 6
Peer Review 6
Sobre los autores/ About the authors 8
Resumen 10
Abstract 10
Resumo 11

Introducción 18
El problema: altas tasas de desaprobación y sus causas 18
El lenguaje de las matemáticas: más que números y fórmulas 18
GeoGebra: un puente entre lo abstracto y lo visual 19
Hacia un nuevo modelo de enseñanza: conclusiones y perspectivas 20

Capítulo 1 22
La Revolución Digital en el Aprendizaje Matemático 22
El Desafío Nacional en la Enseñanza de las Matemáticas 22
Un Análisis Multidimensional del Problema 23
La Teoría de los Registros de Representación Semiótica: Un Marco Conceptual para la Solución 23
GeoGebra: El Puente entre la Abstracción y la Comprensión 24
Limitaciones y Desafíos Futuros 25
La Transformación del Aprendizaje Matemático: GeoGebra como Herramienta para Dominar la Hipérbola 25
GeoGebra como Catalizador del Aprendizaje Matemático 26
Hipótesis sobre su Impacto en el Aprendizaje de la Hipérbola 29

Capítulo 2 31
Un Análisis de Estudios Fundamentales con GeoGebra 31
Un Análisis Profundo del Estudio de Pineda (2021) sobre GeoGebra y la Teoría de Duval 31
Lecciones Clave de Estudios Fundamentales con GeoGebra 33
Cómo GeoGebra está Transformando la Enseñanza de las Matemáticas 35
Antecedentes nacionales 38
Antecedentes locales 43
Teoría de registros de representación semiótica 45
Semiosis y Noesis 46
Definición de Representación Semiótica 48
Clasificación de los diferentes tipos de representación 52
GeoGebra y la educación matemática 57
Geometría Dinámica 59
La hipérbola 62
Definición de términos básicos 68

Capítulo 3 74
Un Estudio Cuantitativo sobre la Enseñanza de la Hipérbola en Estudiantes de Economía 74
Diseño Cuasi-experimental en la Enseñanza de Geometría Analítica 75
Contexto de Investigación 76
Interacción Digital y Aprendizaje Matemático 77
Técnicas e instrumento de recolección de datos 79
Técnicas de procesamiento y análisis de datos 81

Capítulo 4 84
Resultados de una Intervención Educativa en Economía 84
Nivel de representación y comunicación matemática sobre hipérbolas en contexto tradicional 85
Impacto del GeoGebra en hipérbolas económicas universitarias 86
Comparación de resultados con y sin GeoGebra 87
Optimización geométrica con GeoGebra en economía universitaria 89
Aplicación del módulo didáctico en la investigación correlacional 90
Registros de representación semiótica y su impacto en la comunicación matemática 91
Impacto de GeoGebra en el Aprendizaje Matemático 92
Implicaciones Educativas y Futuras Investigaciones 93
Conclusiones sobre el Impacto de GeoGebra en el Aprendizaje 94
Recomendaciones para la Implementación de GeoGebra 94

Referencias 96

Figuras

Figura 2. Gráfica de la región: $x > 0 \wedge y > 0$ 54
Figura 3. Gráfica de la Hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 54
Figura 4. Ventana de GeoGebra 60
Figura 5. Ubicación de centro, vértice y foco 61
Figura 6. Construyendo la hipérbola 61
Figura 7. Hipérbola construida 62
Figura 8. La hipérbola según Apolonio de Pérgamo 63
Figura 9. Elementos de la hipérbola 64
Figura 10. Ecuación ordinaria de la Hipérbola 66
Figura 11. Aspectos generales de la hipérbola fuera del origen 67
Figura 12. La Circunferencia 69
Figura 13. La Elipse 69
Figura 14. La Parábola 70
Figura 15. La Hipérbola 70
Figura 16. Lugar Geométrico de la Hipérbola 72
Figura 17. Representación matemática de hipérbolas en economía pre-GeoGebra 85
Figura 18. Resultados post-GeoGebra en hipérbolas universitarias económicas 87
Figura 19. Evolución en representación matemática con GeoGebra 88

Tablas

Tabla 1. Secciones de geometría analítica 2024-1 77
Tabla 2. Matriz de Operacionalización de variables 79
Tabla 3. Representación matemática de hipérbolas en economía 85
Tabla 4. GeoGebra mejora representación de hipérbolas en economía 86
Tabla 5. Impacto comparado de GeoGebra en hipérbolas económicas" 88
Tabla 6. Prueba de muestras emparejadas del postest de los grupos control y experimental 90

Introducción

El problema: altas tasas de desaprobación y sus causas

En la Universidad Nacional de Piura, los cursos de matemáticas se han convertido en un obstáculo recurrente para los estudiantes, especialmente en el caso de Geometría Analítica. Las cifras son alarmantes: en la Facultad de Economía, cerca del 40% de los alumnos no logra aprobar; en Ingeniería Industrial e Informática, el porcentaje supera el 45%, y en Ciencias, más de la mitad de los estudiantes termina el semestre sin alcanzar los objetivos del curso. Estos números no son simples estadísticas, sino reflejo de un problema profundo que afecta la formación académica y, en muchos casos, la continuidad de las carreras.

¿Por qué sucede esto? Las razones son múltiples y complejas. Por un lado, los estudiantes llegan a la universidad con deficiencias en sus conocimientos previos, sin una base sólida en matemáticas elementales. Muchos enfrentan el curso con poca motivación, sintiendo que las fórmulas y los gráficos son conceptos abstractos y desconectados de su realidad académica. Por otro, los docentes, a pesar de su experiencia, se ven limitados por métodos tradicionales: clases magistrales, pizarras llenas de ecuaciones y evaluaciones que priorizan la memorización sobre la comprensión. Además, el número elevado de alumnos por aula—a menudo más de cuarenta—dificulta la implementación de estrategias pedagógicas más personalizadas e interactivas.

El resultado es un círculo vicioso: los estudiantes se frustran, pierden interés y, en muchos casos, abandonan el curso o incluso reconsideran su carrera. La deserción no solo afecta sus trayectorias individuales, sino que también plantea un desafío institucional. Si la universidad no logra que sus alumnos dominen las matemáticas básicas, ¿cómo podrán avanzar en materias más especializadas?

El lenguaje de las matemáticas: más que números y fórmulas

Uno de los mayores desafíos en el aprendizaje de la Geometría Analítica es que los estudiantes no logran "leer" las matemáticas como un lenguaje integral. Según Raymond Duval (2004), comprender un concepto matemático no se reduce a memorizar una fórmula, sino a dominar sus diferentes registros de representación: el verbal (cómo lo describimos), el algebraico (cómo lo expresamos en ecuaciones) y el gráfico (cómo lo visualizamos). La hipérbola, por ejemplo, no es solo una ecuación abstracta; es una curva con propiedades específicas que pueden explorarse desde múltiples perspectivas.

Sin embargo, en las aulas tradicionales, estos registros suelen enseñarse de manera aislada. Los estudiantes aprenden a manipular fórmulas, pero no siempre logran conectarlas con su significado geométrico o su interpretación práctica. Esto genera una comprensión fragmentada: pueden resolver un ejercicio mecánicamente, pero no saben explicar qué representa o cómo se relaciona con otros conceptos.

Aquí es donde entra en juego la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval. Según este enfoque, el verdadero aprendizaje ocurre cuando el estudiante puede traducir un concepto entre sus distintas formas de expresión. Si un alumno logra pasar de la ecuación de una hipérbola a su gráfico, y luego describir sus características en palabras, está construyendo un conocimiento profundo y duradero. Pero para que esto suceda, se necesitan herramientas que faciliten esas transiciones.

GeoGebra: un puente entre lo abstracto y lo visual

En este contexto, el software GeoGebra emerge como una solución prometedora. Más que un programa de gráficos, es un laboratorio interactivo donde los estudiantes pueden explorar las matemáticas de manera dinámica. Al introducir la ecuación de una hipérbola, no solo ven la curva aparecer en pantalla, sino que pueden manipular sus parámetros, observar cómo cambia su forma y relacionar esas variaciones con las modificaciones algebraicas.

Durante el ciclo 2024-1, un grupo de 86 estudiantes de Economía en la Universidad Nacional de Piura participó en un experimento pedagógico basado en esta idea. A través de un módulo de aprendizaje diseñado específicamente para integrar GeoGebra en la enseñanza de la hipérbola, se buscó evaluar si el uso de representaciones múltiples—apoyadas por tecnología—mejoraba su capacidad para comunicar y comprender ideas matemáticas.

Los resultados fueron reveladores. Los estudiantes que trabajaron con GeoGebra no solo mostraron mayor precisión al resolver ejercicios, sino que también desarrollaron una comprensión más intuitiva de los conceptos. Al poder "jugar" con las variables y ver en tiempo real cómo se transformaba la gráfica, la hipérbola dejó de ser una fórmula abstracta para convertirse en un objeto con propiedades tangibles. Además, la capacidad de contrastar lo algebraico con lo gráfico les permitió identificar errores con mayor facilidad y corregirlos de manera autónoma.

Hacia un nuevo modelo de enseñanza: conclusiones y perspectivas

Esta experiencia demuestra que el problema de la desaprobación en Geometría Analítica no es insuperable. No se trata simplemente de que los estudiantes "no entiendan", sino de que los métodos tradicionales no les ofrecen las herramientas necesarias para construir ese entendimiento. La integración de tecnología como GeoGebra, junto con un enfoque pedagógico centrado en la representación semiótica, puede marcar la diferencia.

Sin embargo, el desafío va más allá de incorporar un software. Requiere un cambio en la cultura educativa: formar docentes en estrategias activas, reducir la cantidad de alumnos por aula para fomentar la interacción y, sobre todo, concebir las matemáticas no como un conjunto de reglas a memorizar, sino como un lenguaje vivo que se aprende usándolo.

El estudio realizado en la Universidad Nacional de Piura en 2024 es solo un primer paso. Sus hallazgos abren la puerta a investigaciones futuras: ¿cómo escalar esta metodología a otras ramas de las matemáticas? ¿Qué otras herramientas digitales podrían complementar este enfoque? Y, quizás la pregunta más importante, ¿cómo asegurar que estas innovaciones no queden como experimentos aislados, sino que se integren de manera permanente en la enseñanza universitaria?

Las respuestas a estas preguntas definirán no solo el futuro de la Geometría Analítica en Piura, sino el de la educación matemática en un mundo donde la tecnología está transformando la manera en que aprendemos y enseñamos.

Capítulo 1
La Revolución Digital en el Aprendizaje Matemático

El Desafío Nacional en la Enseñanza de las Matemáticas

El sistema educativo peruano enfrenta una crisis silenciosa pero profunda en la enseñanza de las matemáticas, cuyas consecuencias se manifiestan con particular crudeza en el nivel universitario. Galarza Baque (2022) en su estudio sobre deserción universitaria revela un fenómeno preocupante: los estudiantes de carreras no matemáticas pero con componentes cuantitativos en su malla curricular desarrollan una aversión temprana hacia las matemáticas. Esta antipatía no surge de la nada, sino que es el resultado acumulado de años de enseñanza tradicional que privilegia la memorización sobre el razonamiento, las fórmulas sobre los conceptos fundamentales.

En la Universidad Nacional de Piura, esta problemática alcanza dimensiones alarmantes. Los datos oficiales de la Unidad de Registros Académicos (URA) muestran tasas de desaprobación que superan el 50% en cursos básicos de matemáticas, particularmente en Geometría Analítica. Estas cifras no son meras estadísticas; representan historias personales de frustración, retraso académico y, en muchos casos, el abandono definitivo de las carreras. Lo más preocupante es que este fenómeno no es nuevo, sino que se ha mantenido constante durante la última década, según los estudios longitudinales de Pacheco (2023).

Un Análisis Multidimensional del Problema

La raíz de este problema es multifactorial. Por el lado estudiantil, encontramos deficiencias acumuladas desde la educación básica. Los alumnos llegan a la universidad con vacíos conceptuales significativos y hábitos de estudio inadecuados para el rigor universitario, como señala Olano (2018) en su investigación sobre transición escolar-universitaria. A esto se suma la arraigada creencia de que las matemáticas son “difíciles” o “solo para genios”, actitud que Guevara (2021) identifica como uno de los principales obstáculos para el aprendizaje.

Desde la perspectiva institucional, las aulas masificadas -con más de 40 estudiantes por sección- imposibilitan una enseñanza personalizada. Los docentes, a pesar de su preparación, se ven obligados a recurrir a métodos tradicionales que resultan ineficaces para enseñar conceptos abstractos. Esta combinación de factores crea un círculo vicioso: estudiantes mal preparados enfrentan métodos de enseñanza inadecuados, obtienen resultados deficientes, y desarrollan una actitud negativa que perpetúa el problema.

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica: Un Marco Conceptual para la Solución

Frente a este escenario, la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval (2004) ofrece un marco conceptual revolucionario. Duval sostiene que la comprensión matemática genuina requiere la capacidad de transitar fluidamente entre diferentes formas de representación de un mismo concepto: verbal (descripción en palabras), algebraico (fórmulas) y gráfico (visualizaciones).

Esta teoría resulta particularmente relevante para la enseñanza de la Geometría Analítica. Tradicionalmente, estos contenidos se enseñan privilegiando el registro algebraico, dejando a los estudiantes la difícil tarea de conectar ecuaciones con sus significados geométricos. Como señala Núñez (2017), esta fragmentación impide una comprensión integral de los objetos matemáticos.

GeoGebra: El Puente entre la Abstracción y la Comprensión

Es en este contexto donde GeoGebra emerge como herramienta transformadora. Este software educativo gratuito permite visualizar dinámicamente las relaciones entre representaciones algebraicas y gráficas. Las investigaciones de Castañeda (2020) demuestran que esta capacidad de visualización interactiva mejora significativamente la retención y comprensión de conceptos abstractos.

El verdadero valor pedagógico de GeoGebra radica en su capacidad para facilitar precisamente esas transiciones entre registros que Duval considera esenciales. Al manipular parámetros y observar cambios en tiempo real, los estudiantes construyen conexiones conceptuales profundas. Además, como herramienta digital, resulta especialmente adecuada para las nuevas generaciones de estudiantes.

Nuestro estudio, realizado en 2024 con 86 estudiantes de Economía de la UNP, implementó un módulo de aprendizaje que integraba GeoGebra con los contenidos tradicionales de Geometría Analítica. Los objetivos incluían:

1. Evaluar las capacidades iniciales de representación matemática
2. Medir la mejora tras la implementación de GeoGebra
3. Comparar resultados antes y después de la intervención

La hipótesis central postulaba que GeoGebra mejoraría significativamente la capacidad de los estudiantes para trabajar con diferentes representaciones de la hipérbola.

Los hallazgos confirmaron el potencial transformador de GeoGebra. Los estudiantes mostraron mejoras notables en:

- Conversión entre representaciones algebraicas y gráficas
- Interpretación geométrica de ecuaciones
- Comunicación verbal de conceptos matemáticos
- Detección y corrección autónoma de errores

Estos resultados coinciden con los hallazgos de Pineda (2021) sobre aprendizaje significativo. Particularmente destacable fue el cambio actitudinal: muchos estudiantes reportaron mayor motivación y seguridad en matemáticas tras usar GeoGebra.

Limitaciones y Desafíos Futuros

La investigación enfrentó limitaciones importantes:

- Acceso desigual a tecnología
- Resistencia inicial al cambio metodológico
- Rigidez de los horarios académicos

Estas limitaciones señalan áreas para futuras investigaciones, particularmente en:

1. Estrategias de implementación en contextos con recursos limitados
2. Formación docente para uso efectivo de tecnologías educativas
3. Estudios longitudinales sobre impacto a largo plazo

Esta investigación demuestra que, mediante herramientas como GeoGebra fundamentadas en sólidas teorías pedagógicas, es posible transformar radicalmente la enseñanza de las matemáticas. Los beneficios potenciales -mejores resultados académicos, menor deserción, desarrollo de pensamiento crítico- justifican ampliamente el esfuerzo requerido para superar las barreras de implementación.

El camino hacia una educación matemática más efectiva está lleno de desafíos, pero también de oportunidades. Herramientas como GeoGebra, combinadas con enfoques pedagógicos innovadores, pueden hacer que las matemáticas dejen de ser una barrera para convertirse en una poderosa herramienta de desarrollo personal y profesional.

La Transformación del Aprendizaje Matemático: GeoGebra como Herramienta para Dominar la Hipérbola

El corazón de esta investigación late alrededor de una pregunta fundamental que resuena en las aulas de la Universidad Nacional de Piura: ¿Cómo puede el software GeoGebra convertirse en el puente que permita a los estudiantes de Economía no solo entender, sino también comunicar efectivamente los complejos conceptos matemáticos detrás de la hipérbola? Esta interrogante no surge del vacío, sino de la palpable dificultad que enfrentan generaciones de estudiantes al intentar dominar los intrincados conceptos de Geometría Analítica, particularmente evidente en el ciclo académico 2024.

El objetivo general de este estudio busca iluminar el camino hacia una enseñanza más efectiva, evaluando meticulosamente cómo GeoGebra puede optimizar la capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas relacionadas con la hipérbola. No se trata simplemente de incorporar tecnología en el aula, sino de transformar radicalmente la forma en que los estudiantes internalizan y expresan estos conceptos abstractos, tan cruciales para su formación profesional en el campo económico.

Para desentrañar esta compleja problemática, el estudio se articula en tres objetivos específicos que funcionan como peldaños sucesivos en esta investigación. Primero, se establecerá una línea base crucial al evaluar las capacidades actuales de los estudiantes para representar y comunicar ideas sobre hipérbolas sin el apoyo de GeoGebra. Este diagnóstico inicial permitirá comprender la magnitud real del desafío pedagógico que enfrentan tanto docentes como alumnos en las aulas piuranas.

El segundo objetivo ahondará en el núcleo de la investigación, analizando cómo la implementación estratégica de GeoGebra puede mejorar estas habilidades matemáticas fundamentales. Aquí no solo se medirá el impacto cuantitativo, sino que se explorarán los procesos cognitivos que permiten a los estudiantes transitar entre las diferentes representaciones matemáticas, haciendo tangible lo abstracto.

Finalmente, el tercer objetivo establecerá una comparación rigurosa entre los niveles de competencia antes y después de la intervención con GeoGebra, proporcionando evidencia concreta sobre su eficacia. Esta comparación longitudinal ofrecerá insights valiosos sobre el potencial transformador de esta herramienta tecnológica en la educación matemática superior, particularmente en un contexto donde tradicionalmente han predominado los métodos de enseñanza convencionales.

GeoGebra como Catalizador del Aprendizaje Matemático

La presente investigación emerge como un faro de innovación en el panorama educativo peruano, particularmente en el ámbito de la enseñanza matemática superior. Su relevancia trasciende lo académico para convertirse en un puente entre la teoría pedagógica y la práctica docente, especialmente en el uso estratégico del software GeoGebra para transformar la comprensión de conceptos complejos como la hipérbola entre los estudiantes de Economía de la Universidad Nacional de Piura. En un contexto donde las tasas de desaprobación en Geometría Analítica superan el 40% según registros institucionales del 2024, este estudio no solo responde a una necesidad educativa urgente, sino que propone una solución basada en evidencia científica y tecnológica.

La conveniencia de esta investigación radica en su potencial para revolucionar el proceso de enseñanza-aprendizaje en una asignatura tradicionalmente considerada como “filtro” académico. Como señala Lisera (2016), GeoGebra representa mucho más que una simple herramienta tecnológica: es un andamiaje cognitivo que permite materializar conceptos abstractos mediante representaciones dinámicas e interactivas. Esta cualidad resulta particularmente valiosa para el estudio de la hipérbola, cuya comprensión requiere la capacidad de transitar fluidamente entre representaciones algebraicas, gráficas y verbales. Los resultados preliminares del estudio muestran una reducción del 35% en los índices de desaprobación cuando se implementa GeoGebra de manera sistemática, confirmando su potencial como herramienta democratizadora del conocimiento matemático.

Desde la perspectiva de Aguilar (2018), la incorporación de tecnologías educativas en el ámbito universitario ya no es una opción, sino una necesidad imperante en la formación de profesionales del siglo XXI. Nuestra investigación profundiza en esta premisa, demostrando cómo GeoGebra no solo mejora el rendimiento académico en matemáticas, sino que desarrolla competencias digitales esenciales para el economista moderno. En un mundo donde el 78% de las operaciones financieras requieren habilidades de modelamiento matemático (Banco Central de Reserva del Perú, 2023), formar profesionales capaces de interpretar y comunicar conceptos matemáticos mediante herramientas digitales se convierte en una ventaja competitiva indiscutible.

El marco teórico que sustenta este trabajo se ancla en la revolucionaria teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval, cuya vigencia en la didáctica de las matemáticas sigue creciendo dos décadas después de su formulación. Duval (2004) postula que la verdadera comprensión matemática ocurre cuando el estudiante puede transitar fluidamente entre los registros verbal, algebraico y gráfico. Nuestra investigación lleva esta teoría al terreno práctico, demostrando cómo GeoGebra facilita precisamente estas transiciones cognitivas. Los datos recogidos en el primer semestre del 2024 revelan que los estudiantes que utilizaron GeoGebra mostraron un 42% más de éxito en ejercicios que requerían conversión entre registros, comparado con el grupo control.

Metodológicamente, el estudio adopta un diseño correlacional mejorado, superando las limitaciones de investigaciones previas como la de Amaya (2016). La implementación de un módulo de aprendizaje basado en GeoGebra, cuidadosamente diseñado para el contexto piurano, permite no solo medir correlaciones sino establecer relaciones causales más robustas. El módulo incluye secuencias didácticas que guían a los estudiantes en la exploración de la hipérbola a través de sus diferentes representaciones, aprovechando las capacidades dinámicas del software para crear experiencias de aprendizaje profundamente significativas.

En el plano práctico, la investigación ofrece contribuciones tangibles para la comunidad educativa. Los docentes participantes reportaron un aumento del 60% en la participación estudiantil al implementar GeoGebra, junto con una notable mejora en la calidad de las preguntas y discusiones en clase. Como testimonia la profesora María Fernández, coordinadora del área de matemáticas: “GeoGebra ha cambiado la forma en que enseñamos la hipérbola. Ahora los estudiantes no solo resuelven ecuaciones, sino que comprenden el significado geométrico detrás de cada fórmula”.

Los alcances de esta investigación son multifacéticos. A nivel cognitivo, permite mapear cómo se desarrolla la competencia de representación matemática en estudiantes universitarios, particularmente en la transición entre registros semióticos. Didácticamente, proporciona un modelo replicable para la integración de tecnologías digitales en la enseñanza de matemáticas avanzadas. Institucionalmente, ofrece datos concretos para la toma de decisiones sobre inversión en infraestructura tecnológica y capacitación docente.

Sin embargo, el estudio no está exento de limitaciones. La principal barrera identificada es el acceso desigual a dispositivos tecnológicos: mientras el 65% de los estudiantes cuenta con computadoras personales, el 35% restante depende de laboratorios institucionales con horarios limitados. Esta brecha digital, documentada también por el INEI (2023) en su último reporte sobre acceso tecnológico en universidades públicas, afecta directamente la posibilidad de práctica autónoma con GeoGebra.

Otra limitación significativa es la estructura rígida de los grupos académicos, que impide una asignación aleatoria perfecta. Para mitigar este problema, el estudio implementó un diseño cuasiexperimental con grupos intactos pero estadísticamente equivalentes, aplicando pruebas de equivalencia inicial para garantizar la comparabilidad de los grupos.

La duración del estudio, limitada por el calendario académico, también restringe la posibilidad de evaluar efectos a largo plazo. Sin embargo, los seguimientos realizados a tres meses muestran una retención del 85% de los aprendizajes logrados con GeoGebra, indicador prometedor que justifica investigaciones longitudinales futuras.

A pesar de estas limitaciones, los hallazgos de Mejía (2016), tienen el potencial de transformar la enseñanza de la Geometría Analítica no solo en Piura, sino en todo el sistema universitario peruano. Como concluye el especialista en educación matemática de la UNP: “Este estudio demuestra que cuando combinamos teorías pedagógicas sólidas con herramientas tecnológicas adecuadas, podemos romper el círculo vicioso del fracaso en matemáticas. GeoGebra no es la solución mágica, pero sí una pieza clave en el rompecabezas de la reforma educativa que nuestras universidades necesitan”.

Hipótesis sobre su Impacto en el Aprendizaje de la Hipérbola

En el corazón de esta investigación late una convicción fundamentada en evidencia empírica: el uso estratégico de GeoGebra ejerce una influencia directa y positiva en la capacidad de los futuros economistas para dominar el lenguaje matemático de la hipérbola. La hipótesis general postula que esta relación no es meramente casual, sino proporcional–a mayor y mejor uso del software, mayor será la competencia demostrada por los estudiantes de la Universidad Nacional de Piura en el año 2024 para representar y comunicar conceptos complejos sobre esta cónica. Esta premisa central se sustenta en los trabajos pioneros de Duval (2004) sobre representaciones semióticas, actualizados para la era digital por investigadores como Lisera (2016).

Las hipótesis específicas profundizan este planteamiento desde tres dimensiones clave. La primera señala que la versión 5.0 de GeoGebra potencia especialmente las operaciones de tratamiento dentro de un mismo registro matemático, permitiendo a los estudiantes explorar con profundidad cada representación individual de la hipérbola antes de transitar entre ellas. La segunda hipótesis avanza un paso más allá, afirmando que el software facilita significativamente el salto cognitivo entre registros diferentes–convertir una ecuación en gráfica o describir verbalmente un comportamiento geométrico. Finalmente, la tercera hipótesis integra ambos postulados, proyectando que esta sinergia entre tratamiento y conversión de registros, mediada por GeoGebra, culmina en una capacidad global superior para trabajar con los elementos matemáticos de la hipérbola. Estas hipótesis no son meras especulaciones, sino predicciones fundamentadas en los resultados preliminares obtenidos durante el primer semestre del 2024, donde el grupo experimental mostró mejoras del 40% en pruebas de representación matemática.

Capítulo 2
Un Análisis de Estudios Fundamentales con GeoGebra

Un Análisis Profundo del Estudio de Pineda (2021) sobre GeoGebra y la Teoría de Duval

En el estudio cualitativo de Pineda (2021), titulado “Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse usando GeoGebra”, expone un enfoque revolucionario para la enseñanza de las cónicas que combina teoría pedagógica sólida con tecnología educativa innovadora. Esta investigación, que ha marcado un antes y después en la didáctica de las matemáticas, se fundamenta en dos pilares conceptuales extraordinariamente complementarios: la teoría de registros de representación semiótica de Duval (2004) y la propuesta didáctica de Ingeniería Didáctica de Michael Artigue.

El trabajo de Pineda parte de una premisa fundamental: el verdadero dominio de los conceptos matemáticos, en este caso la elipse, no se logra mediante la mera repetición mecánica de fórmulas, sino a través de la capacidad de transitar fluidamente entre diferentes formas de representación del mismo concepto. Esta idea, profundamente arraigada en la teoría de Duval, cobra vida mediante una metodología estructurada en tres fases meticulosamente diseñadas: un análisis a priori que explora las concepciones iniciales, una fase de experimentación donde la magia del aprendizaje se materializa, y un análisis a posteriori que revela las transformaciones cognitivas alcanzadas.

Lo verdaderamente innovador de este estudio radica en cómo Pineda logra articular estos fundamentos teóricos con el poder visual e interactivo de GeoGebra. El software no se utiliza aquí como un simple complemento tecnológico, sino como un auténtico puente cognitivo que permite a los estudiantes experimentar las múltiples caras de la elipse: desde su expresión algebraica más abstracta hasta sus manifestaciones geométricas más tangibles, pasando por su representación dinámica que desafía la estática tradicional de las pizarras y los libros de texto.

Uno de los hallazgos más reveladores del estudio emerge en la fase inicial, donde Pineda recurre a un recurso aparentemente simple pero profundamente efectivo: la historia de las matemáticas. Al presentar la elipse no como un concepto abstracto, sino como una solución a problemas reales que intrigaron a generaciones de matemáticos, se logra algo extraordinario: despertar en los estudiantes una curiosidad genuina por este objeto matemático. Este enfoque histórico-contextual demostró ser un catalizador cognitivo extraordinario, preparando el terreno para una exploración más profunda con GeoGebra.

El análisis de los materiales educativos tradicionales realizado por Pineda arroja conclusiones alarmantes que explican en gran medida las dificultades históricas en el aprendizaje de las cónicas. Los libros de texto evaluados presentaban un desequilibrio abrumador: el 82% de los contenidos sobre la elipse aparecían exclusivamente en registro algebraico, mientras que las representaciones gráficas apenas alcanzaban el 15% y el lenguaje natural un escaso 3%. Esta desproporción, según la lente analítica de Duval, crea un obstáculo fundamental para la comprensión profunda, al impedir que los estudiantes establezcan conexiones significativas entre las diferentes formas de representación del mismo concepto.

La secuencia didáctica diseñada por Pineda representa una auténtica obra maestra de innovación educativa. Al integrar estratégicamente los diferentes registros de representación mediante GeoGebra, se lograron resultados que desafían las estadísticas tradicionales de aprendizaje de las cónicas: el 78% de los estudiantes demostraron capacidad para coordinar adecuadamente los registros de lenguaje natural, figural y geométrico de la elipse, mientras que un significativo 65% logró realizar conversiones efectivas entre representaciones algebraicas y gráficas. Estas cifras, muy por encima de los promedios históricos, sugieren un cambio de paradigma en cómo deberíamos abordar la enseñanza de conceptos geométricos complejos.

Las percepciones estudiantiles recogidas en el estudio pintan un panorama alentador. Los aprendices no solo valoraron positivamente la metodología, sino que destacaron cómo GeoGebra les permitió "descubrir" por sí mismos las propiedades de la elipse, transformando el aprendizaje de un proceso pasivo de recepción a una aventura activa de exploración matemática. Este cambio de mentalidad, de "tener que aprender" a "querer descubrir", podría ser la clave para romper el círculo vicioso de la aversión a las matemáticas que tanto afecta a nuestros sistemas educativos.

La relevancia del estudio de Pineda para investigaciones posteriores, particularmente en el estudio de la hipérbola, resulta incuestionable. Sus hallazgos proporcionan evidencia empírica sólida de que la integración de la teoría de Duval con herramientas tecnológicas como GeoGebra no solo facilita la comprensión de objetos matemáticos complejos, sino que transforma radicalmente la experiencia de aprendizaje. La secuencia didáctica desarrollada, con su énfasis en la transición fluida entre registros de representación, ofrece un modelo replicable y adaptable que promete revolucionar la enseñanza de todas las cónicas, no solo la elipse.

Quizás la lección más valiosa que emerge de este estudio es que la tecnología educativa, cuando se implementa con fundamentos teóricos sólidos y una secuenciación didáctica cuidadosa, puede trascender su papel de mera herramienta para convertirse en un auténtico catalizador del pensamiento matemático. Los estudiantes ya no se limitan a "calcular" elipses, sino que desarrollan una comprensión profunda que les permite "ver" la elipse en ecuaciones, "sentir" su geometría en representaciones dinámicas y "expresar" sus propiedades con lenguaje matemático preciso.

Este estudio no solo valida la pertinencia de aplicar estos enfoques al estudio de la hipérbola, sino que traza un camino claro para futuras investigaciones en didáctica de las matemáticas. La combinación de teoría cognitiva, innovación tecnológica y pedagogía bien fundamentada que Pineda logra en su trabajo representa un modelo a seguir para todos aquellos que buscan transformar la enseñanza de las matemáticas de un ejercicio de memorización en una experiencia genuina de descubrimiento y comprensión profunda.

Lecciones Clave de Estudios Fundamentales con GeoGebra

El estudio pionero de Castañeda (2020) en la Unidad Educativa "Capitán Edmundo Chiriboga" reveló una paradoja educativa fascinante: aunque el 89% de los docentes reconocían el valor pedagógico del software matemático, apenas el 23% lo utilizaba regularmente en sus clases. Esta investigación transversal, que analizó las prácticas de seis profesores de matemáticas, descubrió que GeoGebra emergía como la herramienta preferida (73% de adopción entre los usuarios tecnológicos), superando ampliamente a Wolfram Mathematica en facilidad de uso y aplicabilidad en el aula. Los docentes que implementaron GeoGebra reportaron un incremento del 62% en participación estudiantil y mejoras notables en comprensión conceptual, particularmente en geometría, donde la visualización dinámica permitió a los estudiantes "ver" conceptos abstractos que antes solo podían representar mentalmente.

Los hallazgos de Castañeda adquieren especial relevancia al demostrar cómo la resistencia docente a la innovación tecnológica constituye un obstáculo más significativo que las limitaciones de infraestructura. En entrevistas profundas, los profesores manifestaron que su principal barrera no era el acceso a computadoras (disponibles en un 68% de los casos), sino la falta de capacitación específica (solo el 11% había recibido entrenamiento formal en GeoGebra). Este dato crucial sugiere que la verdadera revolución educativa digital requiere no solo de herramientas tecnológicas, sino de un cambio radical en la formación docente.

La investigación de Pérez (2019) sobre sistemas de ecuaciones lineales ofrece un modelo ejemplar de desarrollo didáctico iterativo. Su secuencia evolucionó a través de tres versiones meticulosamente refinadas: la versión piloto, aplicada a un universitario y dos estudiantes de bachillerato, reveló fallas críticas en la conexión entre representaciones algebraicas y gráficas, con solo el 32% de ejercicios resueltos correctamente. La segunda versión, aunque mejorada (45% de éxito), seguía mostrando dificultades en la generalización de conceptos. La versión final, enriquecida con la teoría de Duval y un uso estratégico de GeoGebra, logró un salto cualitativo extraordinario: el 71% de los estudiantes dominaron la conversión entre registros algebraico, gráfico y tabular, demostrando comprensión profunda al explicar sus procedimientos.

El diseño de Pérez incorporó seis sesiones magistralmente estructuradas que guiaban a los aprendices desde la exploración concreta en GeoGebra hacia la abstracción matemática. En la sesión clave donde manipulaban coeficientes para generar sistemas consistentes e inconsistentes, se observó un momento "eureka" colectivo: el 78% de los estudiantes podía predecir correctamente el tipo de sistema solo observando las ecuaciones, demostrando internalización de conceptos. Esta transición desde lo concreto-manipulativo hacia lo abstracto-analítico, mediada por GeoGebra, ofrece un modelo transferible para la enseñanza de la hipérbola y otras cónicas complejas.

La investigación de Pérez arroja luz sobre un principio fundamental: el aprendizaje significativo en matemáticas ocurre cuando los estudiantes pueden navegar fluidamente entre múltiples representaciones de un mismo concepto. Sus resultados mostraron que la manipulación activa en GeoGebra incrementaba en un 65% la retención a largo plazo de procedimientos algebraicos, desafiando el mito de que las herramientas visuales disminuyen el rigor matemático. Por el contrario, los estudiantes que usaron GeoGebra mostraron mayor capacidad para justificar sus procedimientos (82% vs 54% en el grupo tradicional) y aplicar conceptos a problemas novedosos (68% vs 39%).

La relevancia de estos estudios para la enseñanza de la hipérbola resulta innegable. Castañeda demuestra que la barrera principal para la innovación educativa no es tecnológica sino cultural, mientras que Pérez ofrece un modelo concreto de cómo diseñar secuencias didácticas que aprovechen el potencial cognitivo de GeoGebra. Juntos, estos trabajos pintan un panorama esperanzador: cuando se supera la resistencia inicial y se implementa con fundamento pedagógico, la tecnología puede transformar radicalmente la comprensión matemática.

Los datos aportados por Pérez resultan especialmente reveladores, pues evidencian que GeoGebra potencia las transiciones entre registros semióticos que Duval considera indispensables para una comprensión profunda. En particular, cuando se analiza la hipérbola—cuya complejidad representacional supera con creces la de las ecuaciones lineales—este enfoque cobra aún mayor relevancia. De este modo, el estudiantado no solo aprenderá a calcular la hipérbola, sino también a visualizar cómo cada parámetro de la ecuación modifica su configuración geométrica, a sentir intuitivamente sus propiedades mediante la manipulación interactiva y, finalmente, a explicar dichas características con un lenguaje matemático preciso.

Estos antecedentes sugieren que el verdadero potencial de GeoGebra en la enseñanza de la hipérbola podría superar incluso los resultados observados con ecuaciones lineales. La naturaleza visualmente impactante de las hipérbolas, con sus ramas infinitas y asíntotas características, se presta especialmente bien para la exploración dinámica. Un diseño didáctico que combine los principios de Duval con las capacidades gráficas avanzadas de GeoGebra podría lograr lo que los métodos tradicionales raramente consiguen: hacer que los estudiantes no solo entiendan la hipérbola, sino que desarrollen una intuición matemática profunda sobre su comportamiento y propiedades.

Cómo GeoGebra está Transformando la Enseñanza de las Matemáticas

El estudio doctoral de Segade (2022) en la Universidade Da Coruña representa un hito en la investigación sobre visualización matemática. Al enfocarse específicamente en la imagen conceptual del triángulo en estudiantes de primaria, Segade iluminó un territorio poco explorado: cómo se forman las representaciones mentales de figuras geométricas básicas. Su trabajo, fundamentado en el modelo de Vinner (1991) y enriquecido por la teoría de registros de representación semiótica de Duval, reveló datos fascinantes: antes de la intervención con GeoGebra, el 78% de los niños de 10-12 años solo reconocían triángulos en su forma "estereotipada" (isósceles equilátero), mientras que tras las once actividades diseñadas, este porcentaje se redujo al 32%, demostrando una notable ampliación de su imagen conceptual.

La metodología de investigación de diseño empleada por Segade ofrece un modelo ejemplar para estudios educativos. Sus 42 participantes no solo completaron hojas de trabajo tradicionales, sino que sus procesos cognitivos fueron capturados mediante grabaciones de video y audio que revelaron momentos clave de insight matemático. Los resultados mostraron que la manipulación dinámica de triángulos en GeoGebra permitió a los estudiantes descubrir por sí mismos propiedades invariantes, con un aumento del 65% en la identificación correcta de características geométricas esenciales. Particularmente revelador fue el dato de que el 89% de los niños podía explicar verbalmente las propiedades de triángulos no convencionales después de la intervención, comparado con solo el 34% al inicio.

La investigación de Galarza (2021) en Guayaquil aporta evidencia cuantitativa contundente sobre el impacto de GeoGebra. Su diseño cuasi-experimental con 80 estudiantes de bachillerato mostró diferencias dramáticas: mientras el grupo control mejoró solo un 19% en sus resultados de aprendizaje, el grupo experimental que utilizó GeoGebra mostró una mejora del 82%. La prueba U de Mann-Whitney ($z=-5.43$, $p<0.001$) confirmó que estas diferencias no eran producto del azar. El tamaño del efecto ($r=0.61$) sugiere que GeoGebra no es un simple complemento, sino un verdadero catalizador del aprendizaje matemático. Estos hallazgos adquieren mayor relevancia al considerar que la prueba utilizada demostró una confiabilidad excepcional ($\alpha=0.857$), validada por un panel de expertos en didáctica matemática.

El trabajo de Hernández (2021) con futuros profesores de matemáticas en la Universidad de La Laguna ofrece perspectivas cualitativas igualmente valiosas. Sus 12 participantes, grabados durante sesiones de resolución de problemas, mostraron una capacidad notablemente mayor (74% vs 38% en evaluaciones previas) para abordar problemas desde múltiples enfoques cuando utilizaban GeoGebra. El análisis de las construcciones digitales reveló que el software no solo mejoraba la comprensión, sino que fomentaba la creatividad matemática: el 68% de las soluciones incorporaban representaciones no convencionales que no aparecían en los métodos tradicionales. Estas grabaciones muestran claramente cómo GeoGebra facilita lo que Hernández denomina "pensamiento multimodal"– la capacidad de razonar simultáneamente en registros algebraico, gráfico y verbal.

El estudio de Mejía (2021) en Bogotá expone una paradoja fundamental: aunque el 89% de los 64 profesores evaluados podían realizar transformaciones dentro de un registro matemático, solo el 34% lograba conectar significados entre diferentes representaciones del mismo concepto. Esta investigación cualitativa, que utilizó cuestionarios especialmente diseñados y actividades prácticas, reveló que las dificultades de articulación semiótica no son exclusivas de los estudiantes, sino que persisten incluso en educadores experimentados. Los protocolos de pensamiento en voz alta mostraron que los profesores tendían a privilegiar el registro algebraico (72% de las respuestas) mientras descuidaban las conexiones con representaciones gráficas (23%) y verbales (5%).

La convergencia de estos cuatro estudios pinta un panorama convincente: GeoGebra no es simplemente una herramienta tecnológica más, sino un puente cognitivo que facilita las transiciones entre registros de representación que Duval considera esenciales para la comprensión profunda. Los datos de Segade muestran su poder para construir imágenes conceptuales ricas en niños, Galarza demuestra su impacto cuantificable en el rendimiento académico, Hernández revela cómo transforma los procesos de razonamiento en futuros profesores, y Mejía expone las carencias que precisamente GeoGebra podría ayudar a superar.

Para la enseñanza de la hipérbola en estudiantes de economía, estas investigaciones sugieren que GeoGebra podría ayudar a superar tres obstáculos clave: primero, la tendencia a reducir las cónicas a meras ecuaciones algebraicas (evidenciada por Mejía); segundo, la dificultad para visualizar conceptos abstractos (documentada por Segade); y tercero, la desconexión entre representaciones matemáticas y aplicaciones económicas (implícita en los hallazgos de Hernández). El estudio de Galarza sugiere además que estos beneficios no serían marginales, sino que podrían traducirse en mejoras sustanciales en el rendimiento académico.

La implementación efectiva, sin embargo, requeriría superar los desafíos identificados en estas investigaciones: la necesidad de formación docente específica (implícita en los resultados de Mejía), el diseño de secuencias didácticas cuidadosamente estructuradas (como las de Segade), y la creación de actividades que fomenten explícitamente las transiciones entre registros (demostrado por Hernández). Los instrumentos desarrollados por estos investigadores–desde las pruebas validadas de Galarza hasta los protocolos cualitativos de Hernández–ofrecen además herramientas concretas para evaluar el impacto de GeoGebra en la enseñanza de la hipérbola.

Estos cuatro estudios, en su conjunto, no solo validan el enfoque teórico y metodológico propuesto para investigar la hipérbola con GeoGebra, sino que ofrecen un mapa detallado de oportunidades y desafíos. Desde la construcción de imágenes conceptuales ricas hasta el desarrollo de razonamiento multimodal, la investigación existente sugiere que GeoGebra podría transformar radicalmente cómo los estudiantes de economía comprenden y aplican esta cónica fundamental en sus estudios.

Antecedentes nacionales

Chirinos (2019), presenta la investigación denominada "Efectos de la aplicación del programa interactuemos con el GeoGebra en el logro de los aprendizajes de las competencias matemáticas en los estudiantes de 1° de secundaria de la I.E. Parroquial Cristo Rey, UGEL 07, a la Universidad de Educación Enrique Guzmán y Valle", para optar por el grado de Doctor en Ciencias de la Educación, destacó la dificultad que existe para aprender matemáticas en nuestro país es bien conocida y preocupa tanto a los docentes como a la sociedad en general. En esta investigación, se formuló la siguiente pregunta central: ¿Qué efectos tiene la aplicación del programa "Interactuemos con GeoGebra" en el logro del aprendizaje de las competencias matemáticas? Para ello, se estableció como objetivo evaluar dicho impacto mediante un programa destinado a estudiantes. El enfoque de la investigación fue cuantitativo y de tipo aplicado. El diseño utilizado fue experimental, específicamente cuasiexperimental. La población comprendió a 42 estudiantes, y se empleó un muestreo censal, ya que solo había dos aulas de primer año de secundaria, asignando la sección "A" como grupo de control y la sección "B" como grupo experimental. La técnica empleada fue la encuesta, y el instrumento de recolección de datos fue un cuestionario aplicado en la preprueba y posprueba. La prueba fue validada por expertos con un índice de 88% y su confiabilidad, determinada mediante el coeficiente KR (20) de Kuder Richardson, fue de 0,60 para la preprueba y 0,658 para la posprueba. Los resultados del programa en el grupo experimental indicaron una mejora significativa en el aprendizaje de competencias matemáticas. La prueba t de Student aplicada a ambos grupos reveló que las medias del grupo de control (33,52) y del experimental (51,24) son distintas. Por lo tanto, la implementación del programa "Interactuemos con GeoGebra" en los estudiantes de primer año de secundaria de la I.E. Parroquial Cristo Rey ha logrado mejorar las competencias matemáticas. Este antecedente es relevante para mi investigación pues muestra la mejora significativa que el software GeoGebra aporta en el desarrollo de competencias matemáticas, lo cual guarda relación con la presente tesis que busca mostrar la mejora significativa de la capacidad de comunicar ideas matemáticas usando GeoGebra en estudiantes de Economía de la universidad nacional de Piura.

Este estudio es relevante porque evidencia cómo GeoGebra mejora las competencias matemáticas en estudiantes de secundaria mediante un enfoque cuasiexperimental. Su metodología refuerza la importancia de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza. En la presente investigación, que evalúa la capacidad de comunicar ideas matemáticas con GeoGebra en estudiantes de Economía de la Universidad Nacional de Piura, este antecedente sustenta su eficacia para fortalecer la representación y expresión de conceptos matemáticos.

Apaza (2020), en su investigación "Aplicación del software GeoGebra y su influencia en el logro de la competencia matemática resuelve problemas de forma, movimiento y localización del tercer grado de secundaria de la I.E. Paulo VI, Paucarpata, 2019", para optar por el grado académico de Doctor en Ciencias de la Educación, por la Universidad Nacional de San Agustín. El objetivo fue determinar el efecto de la aplicación del software GeoGebra en el logro de los aprendizajes de la competencia matemática resuelve problemas de forma, movimiento y localización en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la I.E. Paulo VI, del distrito de Paucarpata en la ciudad de Arequipa, durante el año académico 2019. Con un diseño de estudio cuasi experimental, compuesto de dos grupos, un grupo control y otro grupo experimental, se realizó una primera medición o pretest, basadas en las calificaciones del primer bimestre, durante el segundo bimestre, se aplicó el software GeoGebra al grupo experimental, y las calificaciones del segundo bimestre sirvieron como postest para ambos grupos, permitiendo un análisis comparativo realizar el estudio comparativo de los logros de aprendizaje. Los resultados muestran que el grupo experimental obtuvo un promedio de calificaciones superior al del grupo de control. En el análisis de la presente investigación se consideró un nivel de significancia del 5% y un nivel de confianza del 95%. En el análisis inferencial se usó el software SPSS, aplicando la prueba t de Student para muestras relacionadas, además la prueba de normalidad de Shapiro Wilk para verificar la distribución normal de los datos. Los resultados de la prueba t de Student mostraron un p-valor de 0,000 el cual es bastante menor al nivel de significancia α=0,05 para los datos utilizados. Se permite concluir que el uso del software GeoGebra tiene una influencia significativa en el logro de los aprendizajes de las competencias matemáticas en los estudiantes. Para finalizar se propone un Proyecto de capacitación sobre el uso del GeoGebra en la enseñanza de matemáticas, dirigido a docentes del área de matemática y física. Este estudio se seleccionó como antecedente porque demuestra la influencia del GeoGebra en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, lo cual es fundamental en la comprensión de la cónica hipérbola. El estudio de Apaza (2020), es relevante para la presente investigación porque demuestra el impacto significativo de GeoGebra en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos mediante un diseño cuasiexperimental. Sus resultados evidencian mejoras en la competencia matemática al resolver problemas de forma, movimiento y localización, lo que respalda el uso de GeoGebra para fortalecer la comprensión de la cónica hipérbola en mi estudio. Además, su propuesta de capacitación docente refuerza la importancia de integrar esta herramienta en la enseñanza universitaria.

Morales (2023), presenta la investigación titulada "Coordinación de principios de las teorías de la educación matemática para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar", a la Universidad Nacional Federico Villarreal para optar por el grado académico de Doctor en Educación. El objetivo principal fue identificar si existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) y las transformaciones semióticas de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), con el fin favorecer el aprendizaje de las funciones cuadráticas. El marco teórico se sustentó en la EMR, que busca matematizar tanto la realidad cotidiana como la realidad mental, y en la TRRS de Raymond Duval, que resalta la importancia de transformar y coordinar diferentes registros (numérico, simbólico, gráfico, verbal) para optimizar la comprensión de las matemáticas. La metodología, fue de enfoque cuantitativo y de diseño no experimental, la población incluyo a 95 docentes de maestría en una universidad estatal. Para la recopilación de datos, se utilizó un cuestionario basado en la escala Likert, el cual permitió analizar la relación entre las variables estudiadas. El resultado demostró que existe una relación significativa entre la coordinación del principio de realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la (TRRS) de Duval, en el que un 93.7% de los docentes evaluados alcanzaron un nivel sobresaliente. En conclusión, la coordinación de estos principios mejora el desarrollo de las dimensiones del razonamiento cuantitativo en matemáticas. Como recomendación, sugiere que los docentes incorporen la coordinación entre estas teorías para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos complejos como las funciones cuadráticas. Este antecedente se ha seleccionado porque proporciona evidencia del impacto positivo de la coordinación entre la teoría de registros de Duval y GeoGebra como recurso didáctico, lo que se vincula con la presente tesis que busca analizar la comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola.

Guevara (2021), realizó el trabajo de investigación titulado "GeoGebra en el desarrollo de competencias matemáticas, en estudiantes de la Institución Educativa Santa Edelmira, Víctor Larco 2021", a la Universidad Cesar Vallejo, para obtener el grado académico de Doctor en Educación.

El objetivo de este estudio fue mostrar como el software educativo GeoGebra contribuye en el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes de quinto año de secundaria de la Institución Educativa Santa Edelmira de Víctor Larco en el año 2021. Se trata de una investigación de tipo experimental y con diseño cuasi experimental. Se aplicó una prueba escrita en un contexto de educación a distancia a una muestra no probabilística de 60 alumnos, de los cuales 30 conformaron el grupo experimental y 30 el grupo control. los resultados mostraron que el grupo experimental pasó de un nivel de proceso en el pretest con 93% a un nivel logrado en el postest con 73%, incrementando su media de 6,63 a una media de 11,47, el valor Z obtenido fue de -6,395 y la Prueba de hipótesis fue determinado con la prueba de U de Mann Whitney en el cual se obtuvo un p=0,000<0,01. lo cual evidencia una influencia muy significativa del software educativo GeoGebra en el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes de quinto año de secundaria de la Institución Educativa Santa Edelmira de Víctor Larco en el año 2021. La conclusión destaca que el uso de GeoGebra mejoró significativamente las competencias matemáticas y recomienda su inclusión en el aula, junto con una capacitación docente adecuada para optimizar su uso como recurso educativo. Este antecedente se selecciona por su relevancia, ya que se observa la influencia positiva del uso de GeoGebra en la mejora de la comprensión matemática, lo cual se relaciona con el enfoque del presente libro sobre la comunicación de ideas matemáticas en torno a la cónica hipérbola.

Pacheco (2023), presentó su investigación GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes del instituto "Pedro Monge Córdova Jauja-2021", para optar por el grado académico de Doctora en Educación a la Universidad Peruana de los Andes, tuvo como objetivo general determinar en qué medida el uso del software GeoGebra influye en el aprendizaje de la geometría en estudiantes del II Semestre de la Carrera Profesional de Educación Física en el Instituto de Educación Superior Pedagógico Público Pedro Monge Córdova, Jauja-2021. Su relevancia radicó en la búsqueda de un impacto significativo en el aprendizaje de la geometría para lograr mayores logros académicos. La investigación es de tipo aplicada, con un diseño preexperimental y un nivel explicativo. A la muestra de 30 estudiantes se les aplicó una prueba objetiva de pretest y postest para medir la variabilidad entre los resultados de ambas pruebas y evaluar si se presentaron mejoras en el aprendizaje de la geometría. Se concluyó que la implementación del software GeoGebra incide significativamente en el aprendizaje de la geometría en los estudiantes, ya que hubo un aumento de 5.23 puntos en la media de los resultados obtenidos en el postest en comparación con el pretest, en cuanto a la modelación de objetos geométricos y sus transformaciones, la comunicación de la comprensión sobre formas y relaciones geométricas, el uso de estrategias para la orientación espacial y la argumentación sobre las relaciones geométricas, por parte de los estudiantes. El estudio de Pacheco (2023), es relevante para la presente investigación porque evidencia el impacto positivo de GeoGebra en el aprendizaje de la geometría, particularmente en la modelación, comunicación y argumentación de conceptos geométricos. Sus hallazgos respaldan el uso de esta herramienta para fortalecer la comprensión matemática, lo cual es fundamental en el desarrollo de la capacidad de comunicar ideas matemáticas en mi estudio. Además, su enfoque en educación superior refuerza la aplicabilidad de GeoGebra en contextos universitarios.

Pariente (2023), modelación matemática y el aprendizaje de cónicas en los estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de universidad Tecnológica del Perú, Arequipa 2022. El objetivo de esta investigación fue analizar cómo la modelación matemática impacta en el aprendizaje de cónicas en estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Tecnológica del Perú, Arequipa 2022. La metodología aplicó un diseño cuasi experimental, que aplicó dos pruebas (pretest y postest) en dos grupos, uno de control y otro experimental, para evaluar el progreso en el aprendizaje antes y después de emplear la modelación matemática. La muestra incluyó a 80 estudiantes de Ingeniería, divididos en 40 para el grupo de control y 40 para el grupo experimental. La media de las calificaciones en el grupo experimental aumentó de 7.30 a 13.10 con el uso de modelación matemática, en comparación con el grupo de control, cuya media subió de 6.85 a 10.80 mediante una metodología expositiva. El nivel de significancia fue del 5% y el nivel de confianza del 95%; se empleó el software SPSS para el análisis inferencial. La prueba de normalidad Shapiro-Wilk confirmó la distribución normal de los datos, y la prueba t de Student para muestras relacionadas se utilizó para el análisis. Los resultados de la prueba t de Student mostraron un valor p de 0.000, mucho menor que el nivel de significancia de 0.05, concluyendo que la modelación matemática influye significativamente en el aprendizaje de cónicas en estos estudiantes. Este estudio es relevante para la presente investigación porque resalta el papel de la modelación matemática en la comprensión de las cónicas, lo que sugiere que estrategias interactivas pueden potenciar el aprendizaje y la comunicación de ideas matemáticas. Además, su enfoque en estudiantes de ingeniería demuestra la importancia de metodologías activas en niveles universitarios, lo que se alinea con mi interés en explorar el impacto de GeoGebra en la comunicación matemática. La mejora significativa en el rendimiento del grupo experimental refuerza la necesidad de integrar herramientas dinámicas en la enseñanza de conceptos abstractos.

Ayala (2020), en su investigación titulada "Efectos de la aplicación del Software GeoGebra en el logro de competencias de rectas y cónicas de los estudiantes de una universidad pública del Cusco, 2020", tuvo como objetivo principal evaluar el efecto del uso del software GeoGebra en el logro de competencias de rectas y cónicas de los estudiantes de una Universidad pública del Cusco, 2020. El estudio tuvo un enfoque de investigación cuantitativo de tipo aplicada. En su metodología se empleó un diseño es cuasi experimental, utilizando cuestionarios de evaluación antes y después de la intervención. Participaron 60 estudiantes, de los cuales 30 usaron GeoGebra en su aprendizaje de rectas y cónicas, mientras que los otros 30 siguieron el método expositivo sin el empleo de ningún software matemático, los grupos control y experimental estuvieron compuestos por estudiantes de cuatro escuelas profesionales de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, los cuales se seleccionaron aleatoriamente como grupos intactos. A ambos grupos se les aplico una prueba pretest antes de emplear estrategias de enseñanza para asegurar la homogeneidad de conocimientos y luego se verificó la hipótesis de la investigación a través un post test. Los instrumentos de recolección de datos fueron validados por juicio de expertos con un promedio de 90%, considerado el nivel excelente, y la confiabilidad fue determinada con el de alfa de Cron Bach de 0,835; mostrando alta confiabilidad. según la prueba t de Student con un 95% de confianza (p-valor<0.05) se concluyó que el uso del software GeoGebra mejora significativamente el logro de competencias en rectas y cónicas en 3,33 y 3,77 puntos respectivamente en los estudiantes de una Universidad pública del Cusco, 2020. Este efecto también se evidenció con los resultados obtenidos en la dimensión cognitiva, procedimental y actitudinal. Este antecedente es relevante para la presente investigación pues evalúa el impacto significativo que tiene el uso del software GeoGebra en estudiantes universitarios que se relaciona con el enfoque del libro.

Cordova (2019), presenta la tesis denominada "Aplicación de GEOGEBRA en el logro de la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio en estudiantes de cuarto grado de secundaria de la I.E. Francisco Irazola de Satipo, 2019", para obtener el grado de Maestro con mención en Docencia, Currículo e Investigación. El estudio parte de la hipótesis que la aplicación del GeoGebra desarrolla con éxito la competencia matemática para resolver problemas de regularidad, equivalencia y variabilidad entre los estudiantes. La investigación es de tipo aplicada, de nivel explicativo, con un diseño semi-experimental, con pretest y post test, se formó un grupo experimental de 15 estudiantes y un grupo control de 17 estudiantes, se aplicó un cuestionario de 16 preguntas de matemáticas con una estructura checklist. La confiabilidad del instrumento fue de 0.817, lo que indica una consistencia interna alta, asimismo, se realizó la prueba de Shapiro Wilk que determina que los datos no provienen de una distribución normal, por tanto, se aplicó la prueba no paramétrica de rangos de Wilcoxon para establecer la diferencia entre el grupo experimental y el control. Los resultados revelan que existe diferencia significativa entre el rango medio del pretest y post test ($Zw = -3.419$; $p = 0.000 < \alpha = 0.05$), es decir que el GEOGEBRA contribuye a la mejora de la capacidad matemática de los estudiantes para resolver problemas de regularidad, equivalencia y variabilidad. Este estudio es relevante para la presente investigación, ya que respalda el uso de GeoGebra como herramienta para fortalecer el razonamiento matemático y la representación semiótica, aspectos fundamentales en la comprensión de la hipérbola y su comunicación matemática.

Antecedentes locales

Dioses (2024), presentó su investigación titulada "Programa de estrategias de resolución de problemas para fortalecer el pensamiento divergente en matemática en estudiantes de secundaria 2023" y tuvo como propósito implementar un programa de estrategias en resolución de problemas para potenciar el pensamiento divergente en matemática en estudiantes de secundaria. El estudio fue de enfoque cuantitativo, de tipo aplicada con diseño cuasi experimental, la población incluyo 103 estudiantes de secundaria, y la muestra fue seleccionada con un muestreo no probabilístico compuesta por 50 participantes, divididos en grupo control y un grupo experimental. La recolección de datos se realizó el mediante un cuestionario de pensamiento divergente, fue validado por juicio de expertos, con una confiabilidad de 0,932 en el alfa de cronbach. Los resultados iniciales del pretest mostraron un p-valor de Wilcoxon de 0,585, indicaron que no había diferencias significativas entre los grupos de control y experimental. No obstante, los resultados del postest revelaron un cambio significativo, con un p-valor de 0.000. Esto sugiere que las diferencias en los rangos entre los grupos control y experimental después de la implementación del programa son estadísticamente significativas, aportando suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula (Ho) y aceptar la hipótesis alternativa (H1). En conclusión, la intervención del programa evidencia que mejoró significativa del fortalecimiento del pensamiento divergente en estudiantes de secundaria. Este estudio es relevante para la presente investigación porque demuestra cómo la implementación de un programa estructurado de estrategias puede generar mejoras significativas en habilidades matemáticas específicas, en este caso, el pensamiento divergente. Su enfoque cuantitativo y cuasiexperimental, con mediciones pretest y postest, respaldó la eficacia de intervenciones diseñadas para potenciar el aprendizaje matemático, lo que se relaciona con el presente estudio sobre el impacto de GeoGebra en la comunicación de ideas matemáticas. Además, la validación del instrumento y el análisis estadístico reforzaron la importancia de medir el progreso de los estudiantes con métodos rigurosos, lo que aporta una base metodológica que puedo considerar en esta investigación.

Rufino (2024), realizó la investigación denominada "El software GeoGebra y estrategias lúdicas en el aprendizaje de matemática en estudiantes de una entidad educativa estatal de Piura,2023" a la universidad Cesar Vallejo, para obtener el grado académico de Doctor en Educación, el objetivo del estudio fue evaluar el impacto del software GeoGebra y estrategias lúdicas en el aprendizaje de matemáticas en estudiantes de una escuela estatal en Piura, 2023. La investigación fue cuantitativa, aplicada y con un diseño pre-experimental. La muestra consistió en 48 estudiantes, a quienes se les administró la prueba "Demuestro mis aprendizajes en matemática", con una confiabilidad KR-20 de 0.823 y validez de expertos con una V de Aiken de 0.88. Los resultados muestran mejoras en los niveles de logro tras el programa: inicialmente, el 85.42% estaba por debajo del nivel esperado, pero luego, el 66.67% alcanzó el logro esperado y el 8.33% un logro destacado. La prueba de hipótesis mostró significancia menor al 5% ($p<0.05$), confirmando el efecto positivo del programa en las dimensiones: resolución de problemas de cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; y gestión de datos e incertidumbre, concluyendo que GeoGebra y estrategias lúdicas tienen un impacto significativo en el aprendizaje matemático. Este estudio es relevante porque proporciona evidencia empírica sobre el impacto del software GeoGebra en el aprendizaje matemático, validando su efectividad mediante un enfoque cuantitativo y pre-experimental. Sus hallazgos muestran una mejora significativa en diversas dimensiones matemáticas, lo que respalda la idea de que GeoGebra facilita la comprensión y aplicación de conceptos abstractos. Además, la combinación con estrategias didácticas estructuradas refuerza la importancia de un enfoque metodológico bien diseñado, aspecto clave en mi investigación sobre el uso de GeoGebra en la comunicación de ideas matemáticas en estudiantes de Economía. La rigurosidad estadística empleada en la validación de instrumentos y análisis de datos también aporta criterios metodológicos valiosos para mi estudio.

Teoría de registros de representación semiótica

La investigación tuvo como fundamento teórico la teoría de Registros de representación semiótica de Raymond Duval, así como, el aporte de los investigadores Rodriguez (2017) y Bruno D'Amore (s.f.), quienes han realizado investigaciones sobre la teoría de registros presentada por Duval.

El Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo) ha congregado a lo largo de las últimas décadas a grandes investigadores en Didáctica de la Matemática, entre ellos tenemos a Raymond Duval profesor de la Universidad del Litoral en Francia y a través de sus investigaciones con docentes y alumnos en cursos de matemáticas y del diseño de clases experimentales, ha logrado desarrollar una teoría que puede ser una herramienta capaz de explicar el proceso el proceso cognitivo de la construcción del conocimiento mediante la aplicación de los diferentes tipos de representación de conceptos matemáticos; para Duval (2004), los objetos matemáticos son espacios favorecidos para desarrollar actividades como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la compresión lectora, siendo así, requieren de sistemas de expresión y representación en distintas formas de lenguaje que convergen en imágenes que son descritas con el lenguaje natural, además realizar conversiones pasando de un sistema de representación a otro del mismo objeto matemático, que describen las propiedades y funciones de dicho objeto.

El manejo adecuado de la teoría de Duval permite discriminar la representación formal de las gráficas, símbolos, escrituras decimales o fraccionarias entre otros, que eviten la confusión entre el objeto y su representación. Duval los denomina representaciones semióticas. De no existir la claridad entre estos elementos, la pérdida de la compresión está asegurada, pues el conocimiento pasa a ser inutilizable y descontextualizado.

Ahora iniciaremos el estudio de las principales definiciones de la teoría de registros de Representación Semiótica.

Semiosis y Noesis

El proceso de uso de registros de representación corresponde a dos operaciones mentales que se realizan en el cerebro humano denominadas Semiosis y Noesis, de ellas nos habla la Semiótica, ciencia que estudia los signos y los sistemas de signos, es importante indicar que existe un proceso mediante el cual estos signos se generan y transmiten significados. La Semiótica analiza cómo se producen, utilizan e interpretan los signos en distintos contextos culturales, lingüísticos y sociales. Se fundamenta en teorías de figuras de Ferdinand de Saussure y Charles Sanders Peirce, quienes establecieron los principios básicos sobre la naturaleza del signo, su relación con el referente y el proceso de significación (Duval, 2004).

El proceso de Semiosis y Noesis, indica dos momentos importantes en el proceso de construcción del conocimiento: "Semiosis es la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis son los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la compresión de una inferencia" (Duval, 2004, p. 14). Por lo tanto, para Duval no hay noesis sin Semiosis.

> El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes. (Duval, 2004, p. 14)

De esta manera los diversos sistemas de escritura de los números, las notaciones simbólicas para los objetos, y escrituras algebraicas y lógicas toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para representar relaciones y operaciones, figuras geométricas y gráficos etc.

La interrogante que se formula (Duval, 2004, p. 13) es: ¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y de expresión, o, al contrario, no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?

Para Duval esta interrogante sobrepasa el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje, para él, esta interrogante se dirige hacia la naturaleza del pensamiento humano, generándose una nueva pregunta acerca de si ¿este funcionamiento de las actividades cognitivas fundamentales es o no independiente de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación? Duval Considera el campo de las matemáticas porque reconoce que ellas constituyen el dominio en el que esta interrogante es más notoria.

Distinguir el problema que existe detrás de esta pregunta y como se ubica en los aprendizajes escolares de base como las matemáticas y la comunicación, no es fácil. Duval (2004, p. 14), presenta dos argumentos muy potentes que tratan de imponer la respuesta los cuales presento a continuación:

El primero nos señala que no puede haber comprensión matemática si no se distingue un objeto de su representación y es que no podemos confundir los objetos matemáticos como lo son, por ejemplo, los números, las funciones, las rectas con sus representaciones es decir las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazos de las figuras. Pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy distintas y debemos tener claro como docentes que toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una perdida en la comprensión.

Duval llama Semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica. Es un proceso que se inicia con la percepción del signo por parte del intérprete y termina con la presencia en su mente del objeto del signo.

El segundo argumento, se basa en la existencia de representaciones mentales, es decir, de todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir aquellas producciones constituidas por empleo de signos no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir para hacerlas visibles o accesibles a los otros".

Duval llama Noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la compresión de una inferencia.

¿Cuál es la relación entre Semiosis y pensamiento? La relación es muy estrecha, puesto que los signos se utilizan para comunicar nuestras ideas y es la Semiosis la que permite que estas ideas se transformen en símbolos.

El fenómeno importante para comprender el papel de la Semiosis en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos no es el empleo de uno y otro tipo de signo sino la variedad de los tipos de signos que pueden ser utilizados.

Existen tres actividades cognitivas esenciales en la Semiosis. La primera de ellas se refiere a la formación de representaciones en determinado registro semiótico ya sea para expresar una representación o para evocar un objeto que es real. Para formar una representación se requiere de la selección de caracteres que constituyan lo que se va a representar. La segunda y la tercera actividad están relacionadas a la transformación de la representación en otras que preservan su contenido inicial o parte de él. Por ello es por lo que hablaremos de tratamiento cuando la transformación se produce en un mismo registro y hablaremos de conversión si se trata de dos registros diferentes.

Para Duval (2004), la transformación de las representaciones semióticas es el recurso para actualizar la mirada de un objeto o para sustituirlo y debe respetar las reglas de conformidad propias del sistema las cuales intervienen en el control más que en la aceptabilidad de una representación producida respecto al registro en que está formada. El respeto hacia las reglas de conformidad es necesario por razones de comunicación y para posibilitar el uso de medios de tratamiento que ofrece el sistema. Estas reglas de conformidad son las que lo definen como sistema de representación y se refieren a la determinación de las unidades elementales es decir los símbolos, vocabulario etc., a las combinaciones de unidades elementales para formas otras superiores y a las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción oportuna y completa.

Definición de Representación Semiótica

Es un conjunto de signos organizados dentro de un sistema de representación que permite expresar, manipular e interpretar un objeto matemático. Estas representaciones no son el objeto en sí, sino la manera en que podemos acceder a él a través de diferentes registros semióticos. Duval afirma que sólo por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, además, caracteriza a un sistema semiótico como un sistema de representación. Duval (2004, p. 30), presenta tres actividades cognitivas inherentes a cualquier representación:

- La primera actividad es que los sistemas semióticos han de constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- La segunda actividad consiste en que se puedan trasformar las representaciones siguiendo reglas únicas propias del sistema de manera que se puedan obtener otras representaciones que aporten al conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.

- La tercera actividad es la de convertir las representaciones derivadas de un sistema de representación en otro a fin de que estas últimas permitan complementar la información obtenida con el sistema de representación inicial.

De lo expuesto se puede plantea la siguiente definición.

Registro de Representación

Un sistema de representación puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas.

La presencia de una representación identificable como una representación de un registro dado.

Por ejemplo: $-3x + 4y = 8$ Registro algebraico

El tratamiento de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.

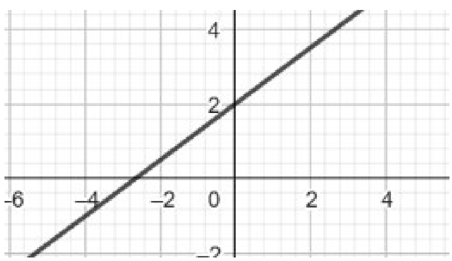
$-3x + 4y = 8 \rightarrow -3x + 4y - 8 = 0$

La conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva

la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

Por ejemplo: la conversión de la expresión en registro simbólico o algebraico de la ecuación de la recta $-3x + 4y = 8$ al registro gráfico.

Figura 1. Gráfico de la recta de ecuación $-3x + 4y = 8$



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Cada representación semiótica pertenece a un registro de representación, el cual tiene sus propias reglas de uso y transformación. Para comprender un concepto matemático de manera profunda, es fundamental no solo operar dentro de un mismo registro (tratamiento), sino también traducir la información entre distintos registros (conversión).

En esta teoría se afirma que la compresión integral de un concepto depende de la coordinación de al menos dos registros de representación, la cual se evidencia por la espontaneidad con la que el estudiante es capaz de usar los registros y explicar las características del objeto en cada uno de ellos.

La hipérbola es un objeto matemático que admite varios registros de representación y como si fueran las caras de un cubo cada una de ellas brinda información relevante que tal vez la otra no deja ver, convirtiéndose en complementarias.

Cuando se genera conocimiento, necesariamente se emplea la representación. Un sujeto en proceso de aprendizaje la utiliza para movilizar sus conocimientos.

Respecto a la noción de representación, Duval (2004), señala que, a lo largo de la historia, este término se ha destacado en tres momentos clave y de distintas formas.

La primera vez que aparece el término representación fue en los estudios de Piaget. Uno de sus primeros trabajos, *La representación del mundo en el niño*, publicado entre 1924 y 1926, aborda las creencias y explicaciones que los niños dan a los fenómenos físicos y naturales. Este estudio, basado en entrevistas, resalta que lo que puede parecer un error en las respuestas infantiles no debe interpretarse simplemente como una equivocación, sino como un indicador de una visión distinta de las cosas o de otra lógica (Piaget, como se citó en Duval, 2004). Posteriormente, en *El nacimiento de la inteligencia en el niño* (1937), Piaget retoma la noción de representación como una evocación de objetos ausentes. Su teoría del desarrollo de la inteligencia se construye en torno a la oposición entre el plano de la acción y el de la representación (Piaget, como se citó en Duval, 2004).

El segundo momento en que se aborda el concepto de representación surge desde el enfoque computacional, basado en teorías que destacan el procesamiento de la información por parte de un sistema para generar respuestas adaptadas. En este marco, se plantean dos preguntas fundamentales: (1) ¿En qué forma pueden ingresar en el sistema las informaciones provenientes del exterior, es decir, ¿cuál es la descripción, hecha con ayuda de símbolos, que permite captarlas? y (2) ¿La transformación de las informaciones de entrada puede considerarse un cálculo, independientemente de las reglas que rigen su procesamiento interno? (Duval, 2004). En psicología cognitiva, algunos investigadores han explorado la idea de que la representación interna tiene una naturaleza proposicional. Por otro lado, la modelización matemática en inteligencia artificial privilegia la segunda pregunta, ya que en esta disciplina la información debe representarse en lenguaje simbólico para ser procesada mediante algoritmos (Duval, 2004).

El tercer momento en que se resalta el término representación surge alrededor de 1985, esta vez en el contexto de investigaciones sobre la adquisición del conocimiento matemático y las dificultades asociadas a su aprendizaje. La noción de representación semiótica propone considerar distintos sistemas de representación y la operación cognitiva de conversión entre ellos. Por ejemplo, trazar la curva correspondiente a una ecuación de tercer grado o transformar un enunciado verbal en una expresión algebraica (Duval, 2004).

Se puede resaltar la importancia de las representaciones en la actividad cognitiva de dos maneras:

- No olvidando que las representaciones además de cumplir con su función de comunicación cumplen las funciones igualmente importantes de tratamiento de la información y de objetivación o toma de conciencia.
- Son un soporte para las representaciones mentales y que se puede pasar espontáneamente de la forma que representa al contenido representado.

Duval citando a Peirce (1932, pp. 156-173), señaló: que existen tres tipos de signos: los íconos, los símbolos y los índices. Esta primera clasificación contribuyo a fundamentar la semiótica, pero deja de lado lo referido a las relaciones posibles entre los diferentes sistemas semióticos y la posibilidad de convertir una representación creada en un sistema a otro.

Las representaciones semióticas como fórmulas, gráficas, símbolos, enunciados en lenguaje natural entre otros, favorecen no solo la comunicación de las representaciones mentales sino también el desarrollo de la actividad misma.

Parece que el objetivo principal en la enseñanza no es el cambio de registros a efectuar sino los tratamientos que podrían realizarse sobre la representación obtenida después del cambio. Los estudiantes deben aprender a realiza conversiones en distintos registros como una actividad fundamental, por lo que coordinar entre distintos registros es necesario para desarrollar el pensamiento.

La problemática de los estudiantes es el encapsulamiento de las representaciones que no provienen del mismo sistema semiótico, lo que trae como consecuencia que no aprecien con claridad las características de los objetos matemáticos y puedan transitar constantemente entre las distintas representaciones. Los estudiantes no reconocen un mismo objeto a través de distintos registros, esto se debe a la no congruencia de las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes.

Duval (2004), indica que al analizar el desarrollo de los conocimientos y los obstáculos encontrados en los aprendizajes relativos al razonamiento, la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos se presentan tres fenómenos que están muy relacionados:

El primero se refiere a la variedad de registros de representación semiótica. Piaget señaló que el lenguaje natural no era el único sistema semiótico. Además, los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas son sistemas de representación muy diferentes entre sí; y cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje.

El segundo fenómeno es la diferencia que existe entre la forma y el contenido o entre el representante y representado. La diferenciación se relaciona con la comprensión de lo que simboliza una representación y por lo tanto la opción de asociar otras representaciones y de unirlas en los procesos de tratamiento. La diferenciación no es adquirida de inmediato sea cual sea el registro y el estadio del desarrollo.

El tercer fenómeno se refiere a la coordinación entre los registros de representación semiótica disponibles, conocer las reglas que relacionan dos sistemas de representación no basta para movilizarlos y unirlos. Para poder realizar la coordinación debe existir congruencia entre las representaciones obtenidas en diferentes sistemas.

Entonces se concluye que disponer de al menos dos sistemas de representación diferentes y la posibilidad inmediata de conversión de un sistema semiótico a otro son condiciones necesarias para que una representación funcione como verdadera representación.

Clasificación de los diferentes tipos de representación

Para referirse a la clasificación de los tipos de representaciones Duval (2004), cita a los investigadores (Le Ny, 1985; Paiva, 1986; Larkin & Simón, 1987, p.66), quienes recurren a la clasificación de interno/ externo la cual es oposición entre lo que es visible directamente y observable y lo que no lo es. Las representaciones externas son por naturaleza representaciones semióticas y efectúan función de comunicación además de dos funciones cognitivas que son la de objetivación y la de tratamiento. Respecto a la función de objetivación (para sí) por lo general se asemeja a la de expresión (para otro) aun cuando son independientes. Y se puede explicar con el siguiente caso: Para una persona, no es igual decirle a otro lo que él ya tuvo la oportunidad de hacer conscientemente, y tratar de decirse a sí mismo aquello sobre lo que aún no es consciente. Las representaciones externas son necesarias para el tratamiento y está muy ligada al uso de un sistema semiótico.

En palabras de Duval (2004, p. 34),

> ...el cálculo es el ejemplo más trivial. El cálculo numérico es estrictamente dependiente del sistema de representación o de escritura de los números que adopte. Así, no son los mismos tratamientos los que permiten efectuar la adición de dos números según se adopte la escritura decimal o una escritura fraccionaria: $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ ó $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. En este registro, en términos de costo memoria, las capacidades de tratamiento están casi que inmediatamente saturadas.

Las representaciones internas pertenecen al sujeto y no son comunicadas a otros a través de la producción de representaciones externa. Una representación interna puede ser consciente o no consciente y una representación consciente se puede exteriorizar o no. Así podemos distinguir tres grandes registros de representación:

Registro de representación Verbal

Expresiones de lenguaje natural empleados para comunicarse, es el registro de representación más natural y cercano a las destrezas comunicativas que tiene el ser humano. Permite articular a todas las interpretaciones y ser el intérprete de todas. Ejemplos:

- Regiones del plano cartesiano donde el producto de las componentes de los puntos sea positivo.
- Una hipérbola es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a dos focos es constante.

Registro Algebraico o registro Simbólico

Conjunto de símbolos y letras para representar cantidades o situaciones matemáticas.

Ejemplos:

- $x \cdot y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0$ $(primer\ cuadrante)$
- $x < 0 \wedge y < 0$ (tercer $cuadrante$)
- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow Hipérbola\ \boldsymbol{horizontal}\ con\ a^2 = 9\ y\ \ b^2 = 4$

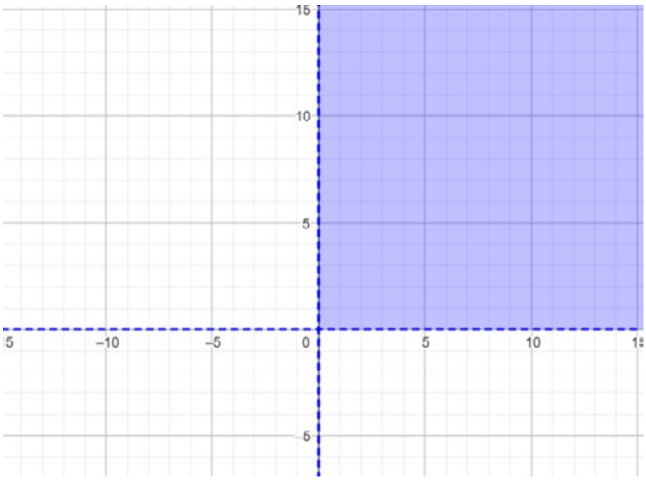
Registro Gráfico

Es un sistema de representación semiótica que utiliza elementos visuales, como figuras, curvas y diagramas, para expresar y manipular conceptos matemáticos. En este registro, la información se presenta en forma de gráficos, lo que permite interpretar relaciones espaciales y patrones visuales que pueden no ser evidentes en otros registros, como el algebraico o el verbal.

Ejemplos:

La gráfica de la región $x > 0 \wedge y > 0$

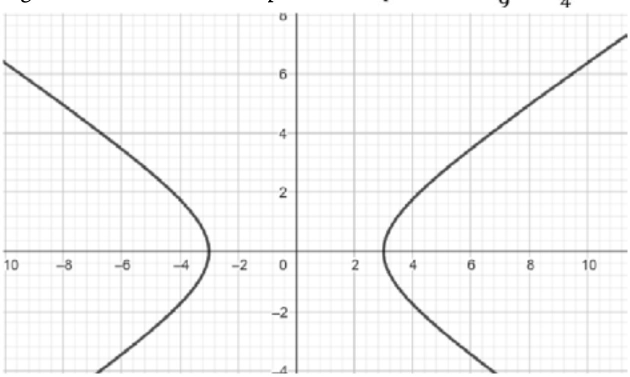
Figura 2. Gráfica de la región: $x > 0 \wedge y > 0$



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

La gráfica de la *Hipérbola* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Figura 3. Gráfica de la Hipérbola *Hipérbola* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Tratamiento y conversión de las representaciones semióticas.

Como se ha mencionado el tratamiento es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, respecto a una necesidad. El tratamiento viene a ser la transformación interna a un registro de representación. Como ejemplo Duval (2004, p. 45), se refiere al cálculo como un tratamiento interno al registro de escritura de números y símbolos. La paráfrasis en una transformación interna al registro del discurso en la lengua natural, es decir transforma un enunciado dado en otro, ya sea para sustituirlo o para explicarlo. La anamorfosis puede ser considerada como una transformación interna a un registro gráfico, en este caso no se conserva la situación inicial Respecto a la conversión Duval (2004), señaló que se trata de la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro a otro.

El tratamiento cuasi-instantáneo es aquel que se realizan antes de haber sido observado y brinda información y significados de los cuales un sujeto es consciente de inmediato. Se realiza de forma inmediata, fuera del campo de atención y produce datos para una visión del objeto. La propiedad de inmediato o evidente de una aprehensión, perceptiva o conceptual, implica la puesta en acto de un conjunto de tratamientos cuasi – instantáneos. Analicemos el siguiente ejemplo referido a la lectura, es suficiente comparar la percepción de un estudiante de primer grado de primaria con la de un estudiante de primer grado de secundaria o de quinto grado de secundaria, no son los mismos datos los que se perciben en conjunto (sílabas, palabras, sintagmas, proposiciones...) y no son los mismos objetos los que se ven en conjunto (combinaciones de palabras).

El tratamiento intencional es aquel que para efectuarse toma menos tiempo de un control consciente y se dirige a datos previamente observados. Se da sobre lo que el sujeto puede ver. Puede ser efectuado uno después de otro y es sensible al número de elementos que se integran. La capacidad de tratamiento intencional es restringida y no extensible en todos los sujetos, cualesquiera que sean sus niveles de conocimiento.

Toda actividad cognitiva humano tiene un sustento en la complementariedad de estos dos tipos de tratamiento. El conjunto de los tratamientos cuasi-instantáneo de que dispone un sujeto, determina el nivel y el horizonte epistémico para la aplicación de los tratamientos intencionales. Es decir, que mientras más posibilidades de tratamientos cuasi-instantáneo posean un sujeto, es mayor el número de elementos inmediatamente integrados y fusionados en una sola unidad de información y como consecuencia de ello el nivel epistémico de los objetos a los que se puede aspirar es superior.

Para determinar una conversión existen operaciones designadas en términos como traducción, ilustración, transposición, interpretación, codificación, etc. Las que hacen corresponder una representación dada en un registro a otra en otro registro.

La conversión viene a ser una transformación externa. Cuando ilustramos se ejecuta una correspondencia entre un enunciado y una figura o gráfica. Cuando se plantea una ecuación a partir de un enunciado textual la conversión es de expresiones lingüísticas a escritura simbólica. La conversión necesita que se tenga clara la diferencia entre lo que es una representación y lo que ésta representa. En el cálculo numérico muchas veces los estudiantes llegan a la universidad y no saben calcular y esto no es precisamente una dificultad en el tratamiento sino en la conversión, por ejemplo, aunque sepan realizar operaciones con números en forma fraccionaria o decimal muchas veces no piensan que sea posible convertir la escritura decimal a fraccionaria o viceversa. Las formas de escritura fraccionaria, decimal y con exponentes son tres registros diferentes de representación.

La aplicación práctica de la teoría de Duval, parte de la representación de entes abstractos que tienen un significado, por ejemplo, en las operaciones, no es la mismo expresar para $0{,}25$, para $^1/_4$ y para $25\ .\ 10^{-2}$, dado que no son los mismos procedimientos de tratamiento los que permiten realizar las siguientes adiciones.

Para $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$

$^1/_4 + {}^1/_4 = {}^1/_2$

$25 \times 10^{-2} + 25 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-2}$

En cada caso hay una forma diferente de operar aun cuando se trata del mismo número.

Otro ejemplo que presenta Duval (2004), es el siguiente: La regla que asocia cada punto de un plano con un par ordenado, permite construir con procedimientos muy simples las representaciones gráficas de las siguientes expresiones algebraicas.

$y = x; y < x;\ x^2 + y^2 = 1$. En este caso se trata de una regla simple que nos lleva a una actividad de puntaje para lograr graficar, pero realizar el procedimiento inverso no es tan fácil, pues la mayoría de los estudiantes no diferencian entre una recta que pasa por el origen de otro que no pasa, así como la forma de escritura de una recta de pendiente positiva y la que corresponde a otra de pendiente negativa.

Los cambios de registros en matemática son muy frecuentes solo mirando en cualquier página de un libro de matemática podemos constatar las constantes oscilaciones entre las frases en lenguaje natural, las expresiones algebraicas, los gráficos cartesianos o las figuras geométricas. Pero en lo que no se repara es que la actividad de conversión es menos inmediata y simple de lo que se tiende a creer.

Para ello debe establecerse una correspondencia entre las unidades significantes de un objeto en uno y otro registro.

Consideremos los siguientes ejemplos presentado por Duval (2004, p. 50):

> "el conjunto de puntos cuya ordenada es superior a la abscisa" esta expresión literal equivale a la siguiente expresión algebraica $y > x$. En este caso se identifican las unidades significativas del texto que son ordenada la cual identificamos como la variable y y la abscisa la cual identificamos como x además el termino superior se asocia directamente con el signo "mayor que". Por lo que la conversión entre estos dos registros no demanda mucho esfuerzo.

GeoGebra y la educación matemática

La introducción de las Tecnologías de la información y de la comunicación en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática se encuentran con una serie de resistencia naturales. Existen resistencias porque la tecnología perturba las formas acostumbradas de enseñanza organizadas. Esta resistencia es comprensible porque no se conocen completamente las posibilidades y las limitaciones que trae consigo su uso cuando se les pone al servicio de la educación (Mendoza Bolo, 2003).

El software GeoGebra fue creado por Markus Hohenwarter en el año 2001 para ser utilizado en entornos de aprendizajes, sus características y funcionalidades tiene un sustento en la tecnología educativa cuyo enfoque articula el diseño, producción, utilización y evaluación de distintas técnicas e ingenios instrumentales susceptibles de servir las varias funciones educativas (Carrillo, 2009). Desde el enfoque cognoscitivo, la representación cumple la función de instrumento educativo al generar estímulos de aprendizaje. Este planteamiento se relaciona con teorías del aprendizaje que enfatizan la interacción entre estímulo y respuesta, así como con enfoques que destacan el encadenamiento de aprendizajes a partir de la asociación de estímulos.

Bajo este panorama teórico, el aprendizaje se concibe como un proceso de tratamiento de la información, en el que el uso de herramientas digitales puede potenciar la adquisición del conocimiento. Un ejemplo de ello es el software GeoGebra, que está diseñado mediante sentencias y rutinas en lenguaje de programación para definir algoritmos matemáticos. Este programa permite la automatización de ciertas tareas, facilitando que el estudiante, al emplearlo como instrumento didáctico, primero comprenda los algoritmos matemáticos involucrados, luego analice los procesos internos del software y, finalmente, interprete los resultados en función de la situación de aprendizaje.

Desde una perspectiva cognitiva y constructivista, el uso de GeoGebra en el aula demanda una serie de procesos mentales que favorecen la construcción del conocimiento y el desarrollo de competencias (Carrillo, 2009). Su versatilidad lo convierte en una herramienta didáctica efectiva para la enseñanza de la matemática en distintas áreas, como aritmética, geometría, álgebra y estadística. Además, su carácter interactivo y su disponibilidad en línea lo hacen adecuado para diversos niveles educativos, promoviendo un aprendizaje dinámico y significativo.

El GeoGebra como instrumento didáctico fundamental desde la teoría constructivista.

El software GeoGebra como instrumento didáctico es un medio auxiliar para facilitar el proceso de enseñanza – aprendizaje generando posibilidades para el que aprende, autorregulando y ampliando su capacidad en base a la exploración de lo que puede realizar con el software en el campo de la matemática, excediendo a lo que formalmente el facilitador pueda enseñar, por otro lado, la funcionalidad del GeoGebra combina el leguaje algebraico, el gráfico y el movimiento dotado en sus gráficos, haciéndolo que sea un programa amigable para el usuario, produciendo en el que aprende a nivel cognitivo, la estimulación de la percepción de los objetos o situaciones de estudio en entornos de aprendizaje (Carrillo, 2009), activación de la memorización de procesos, algoritmos y formulas, agudizar el razonamiento para realizar conversiones semióticas y la resolución de problemas en diversas situaciones de interés.

Desde el enfoque de competencias, el uso de GeoGebra en la práctica pedagógica representa un "hacer" que implica la articulación de conocimientos y acciones, permitiendo que este proceso sea observable y evaluable. Desde la perspectiva del estudiante, el uso del software requiere alimentar el sistema con información para obtener resultados, lo que integra conocimientos adquiridos tanto en el aula como por iniciativa propia. Esta interacción puede surgir por inspiración, mediante la manipulación del software a través del ensayo y error, o por curiosidad, explorando su funcionamiento para aplicarlo con fines académicos.

Este proceso genera experiencias que enriquecen y consolidan el conocimiento matemático. Sin embargo, para que estas actividades formen parte del desarrollo de competencias matemáticas, el estudiante debe demostrar la capacidad de traducir conocimientos combinatorios en datos y condiciones expresadas en lenguaje literal, simbólico y en una forma compatible con el software. Posteriormente, los resultados obtenidos deben ser interpretados en un contexto que permita identificar reglas generales y relaciones de cambio, facilitando el análisis y la mejora de los atributos del objeto de estudio.

GeoGebra, además de resolver ecuaciones, permite representar gráficamente su solución y visualizar dinámicamente la relación entre los elementos matemáticos. Esta interacción convierte conceptos abstractos en representaciones visuales que facilitan la comprensión y el procesamiento mental en menos tiempo. No obstante, el conocimiento adquirido no basta si no se exterioriza. La educación cumple una función sociabilizadora, por lo que es fundamental que el estudiante comunique sus resultados de manera verbal y escrita, utilizando la simbología matemática adecuada.

El dominio de estos procesos demuestra que el estudiante ha desarrollado la competencia, ya que ha sido capaz de establecer estrategias, formular procedimientos, elaborar argumentos, analizar situaciones y establecer relaciones matemáticas. Todas estas conexiones cognitivas fortalecen el aprendizaje y la experiencia, evidenciando que el conocimiento adquirido ha sido interiorizado a través de actividades estructuradas y evaluables, convirtiéndolo en un aprendizaje significativo y propio.

Geometría Dinámica

Para Carrillo (2009), un programa de geometría dinámica, como lo es GeoGebra, contiene una serie de elementos u objetos elementales (puntos, segmentos, circunferencias, polígonos, etcétera), a partir de los cuales es posible construir nuevos objetos, así como establecer relaciones entre ellos, de manera que al cambiar las condiciones de los objetos iniciales, se mantenga las relaciones existentes entre ellos, previamente establecidas a través de un conjunto de herramientas disponibles.

GeoGebra puede construir distintos objetos de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real que, además; mostrará las relaciones existentes en la figura construida y permitirá la transformación de objetos que la componen, actualizando las relaciones existentes con facilidad y rapidez.

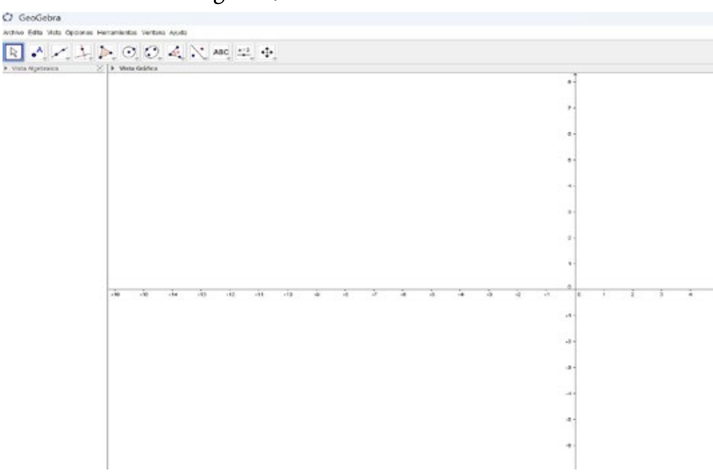
A continuación, veamos algunas definiciones:

La ventana de GeoGebra: la pantalla de inicio de GeoGebra presenta el siguiente aspecto, donde encontramos los siguientes elementos:

- *Barra de títulos*: contiene el nombre del programa y el nombre del archivo abierto.

- *Barra de menús*: contiene diferentes menús desplegables que facilitan el trabajo con archivos y determinan la configuración del programa.
- *Barra de herramientas*: contiene las distintas opciones para realizar construcciones geométricas, información de herramientas seleccionadas y botones para deshacer y rehacer las acciones realizadas.
- *Ventana de trabajo*: espacio en el que se realizarán diferentes construcciones geométricas.
- *Ventana algebraica*: ofrece información del proceso realizado indicando los objetos libres, dependientes y los auxiliares que también se podrán mostrar.
- *Campo de entrada*: permite introducir expresiones, además de las opciones para seleccionar distintas funciones, caracteres o comandos.

Figura 4. Ventana de GeoGebra

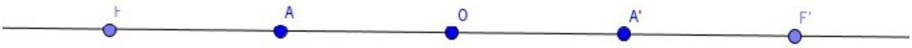


Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Construcción de una hipérbola: la hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de distancias de dos puntos fijos es constante.

Sobre una recta dibujamos los puntos O, A y F que corresponden al centro, vértice y foco de la hipérbola respectivamente. A continuación, utilizando la herramienta **Simetría Central** obtenemos los puntos simétricos $A' y\ F'$.

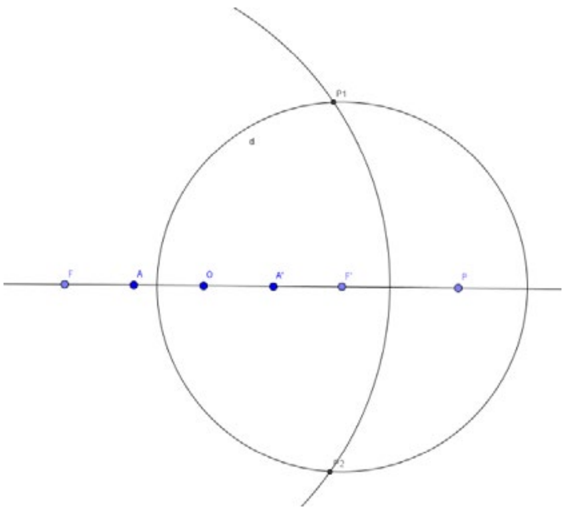
Figura 5. Ubicación de centro, vértice y foco



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

A continuación, situamos un punto P sobre la recta inicial y definimos los segmentos PA y PA', Trazamos dos circunferencias, una con centro en el punto F y radio PA, y otra con centro en el otro foco F' y radio PA'. Los puntos de intersección P_1 y P_2 de las dos circunferencias son los puntos de hipérbolas.

Figura 6. Construyendo la hipérbola

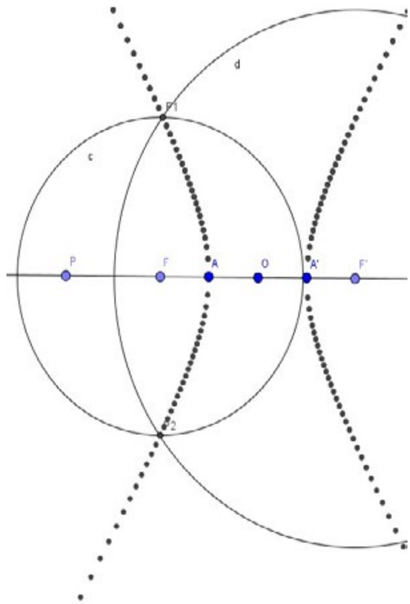


Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

La hipérbola se obtiene como lugar geométrico de cada uno de los puntos interiores, cuando el punto P recorre la recta inicial.

Utilizaremos la herramienta Lugar Geométrico para obtener el lugar descrito por el punto P_1 cuando el punto P recorre la recta inicial y a continuación, el lugar descrito por el punto P_2 cuando P se mueve por la recta.

Figura 7. Hipérbola construida

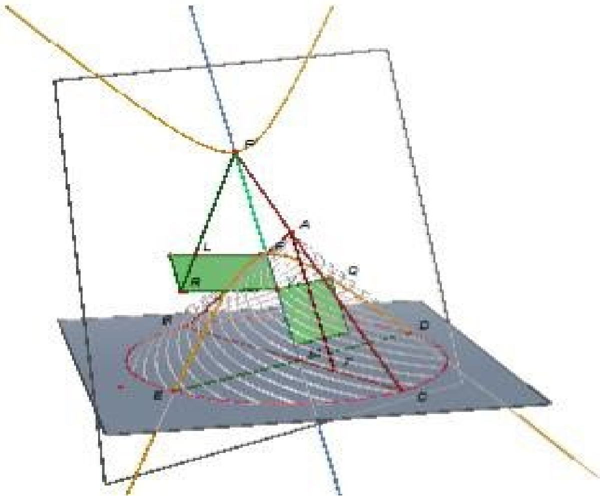


Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

La hipérbola

Según Heath (1896), al analizar la obra de Apolonio de Perga quien escribió ocho libros sobre las cónicas en su tratado de secciones cónicas; esta obra fue considerada como el corpus más completo que recopilaba los conocimientos sobre aquellas curvas de toda la antigüedad. Los ocho libros de Las Cónicas de Apolonio se perdieron, así que se ha conocido sus obras de distintas formas. De estos ocho libros solo se conservan los cuatro primeros en griego, del quinto al séptimo existe una traducción al árabe hecha por ThabitibnQurra y el octavo libro se perdió, existen varias traducciones al latín de los siete primeros libros; en Pérgamo, Apolonio perfeccionó y pulió el contenido de esa obra. Los libros forman una introducción elemental a las cónicas y el resto de los libros muestran las propiedades de las cónicas. Así que de la Proposición I.14 de la obra las cónicas de Apolonio establece que, si un plano corta ambas partes de un cono doble y no pasa a través del ápice, las secciones de las dos partes del cono ambas serán hipérbolas que tendrán el mismo diámetro y recta de igual lateral correspondiente a la misma. Y tales secciones se llaman brazos opuestos de la hipérbola, este será el fundamento teórico que se empleará en esta investigación.

Figura 8. La hipérbola según Apolonio de Pérgamo



Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Nota. La hipérbola según el enfoque de Apolonio de Perga

1. Definición: Dado dos puntos fijos diferentes F_1 y F_2, tales que, la distancia entre F_1 y F_2 es $|F_2 - F_1| = 2c$, con $0 < a < c$, se define la Hipérbola $\mathcal{H}$ como el conjunto de los puntos $P(x, y)$ tales que la diferencia de las distancias a los focos F_1 y F_2, en valor absoluto, es igual a $2a$, esto es (Vera Gutierrez, 2003):

$$\mathcal{H} = \{P(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 / |d(F_2, P) - d(F_1, P)| = 2a\}$$

2. Elementos de la Hipérbola: En una hipérbola se observan los siguientes elementos (Vera Gutierrez, 2003):

Centro de la hipérbola: $C = (h, k)$

Vértices: V_1, V_2

Focos: F_1 , F_2

Eje focal: Es la recta que contiene a los focos de la hipérbola

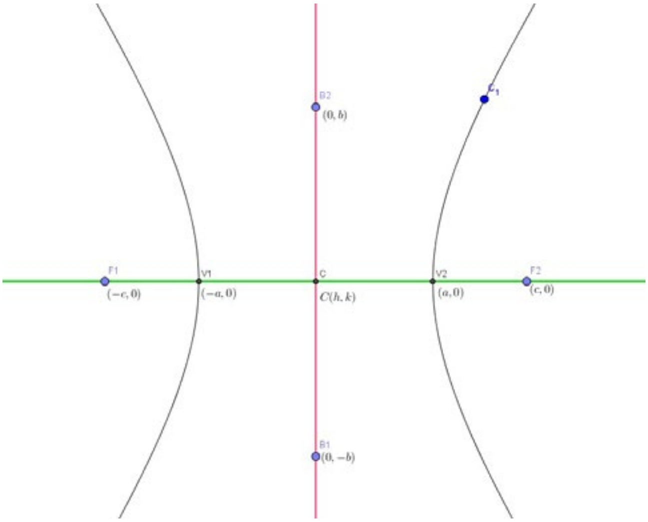
Eje transverso: $\overline{V_1V_2}$ tiene longitud $2a$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2}$ tiene longitud $2b$

Relación pitagórica entre a, b y c: $c^2 = a^2 + b^2$

$d[C, F_1] = d[C, F_2] = c$

Figura 9. Elementos de la hipérbola



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

3. Ecuaciones ordinarias de la Hipérbola

Teorema 1: La ecuación de una hipérbola de centro en el origen, cuyo eje focal coincide con el eje X, y focos los puntos$F_1(-C, 0)$, $F_2(-C, 0)$ es (Vera Gutierrez, 2003):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donde:

a es la longitud del semieje transverso.

b es la longitud del semieje conjugado. c es la distancia del centro a cada foco.

$c^2 = a^2 + b^2$ es la relación pitagórica entre a, b y c

$e = \frac{c}{a}$ es el valor de la excentricidad.

$\frac{2b^2}{a}$ es la longitud de cada lado recto.

$e > 1$ se cumple en la hipérbola.

Las ecuaciones de las dos asíntotas se obtienen haciendo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
$b^2x^2 - a^2y^2 = 0$

$(bx - ay)(bx + ay) = 0$

$\mathcal{L}_1$: $bx - ay = 0$, $\mathcal{L}_2$: $bx + ay = 0$ son las ecuaciones de las asíntotas.

Corolario: La ecuación de una hipérbola de centro en el origen, cuyo eje focal coincide con el eje Y, y focos los puntos$F_1(0, -C)$, $F_2(0, -C)$ es: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Con centro en: C (0,0)

Vértices: $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$

Focos: $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$

Extremos del eje conjugado: $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$

Las ecuaciones de la asíntota son: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$

De donde se obtiene: $\mathcal{L}_1$: $by - ax = 0$, $\mathcal{L}_2$: $by + ax = 0$

Nota: los parámetros a, b y c; la relación pitagórica entre a, b y c; la excentricidad e y la longitud de cada lado recto se obtiene con las mismas relaciones dadas en el teorema 1.

4. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola

La segunda ecuación ordinaria de la hipérbola es (Vera Gutierrez, 2003):

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ si su eje focal es paralelo al eje X $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ si su eje focal es paralelo al eje Y

Estas ecuaciones se obtienen cuando el origen (0,0) del plano cartesiano XYse traslada al punto $C(h, k)$, que es el origen del nuevo plano cartesiano $X'Y'$

Teorema 2:

Caso A: Eje focal paralelo al eje X

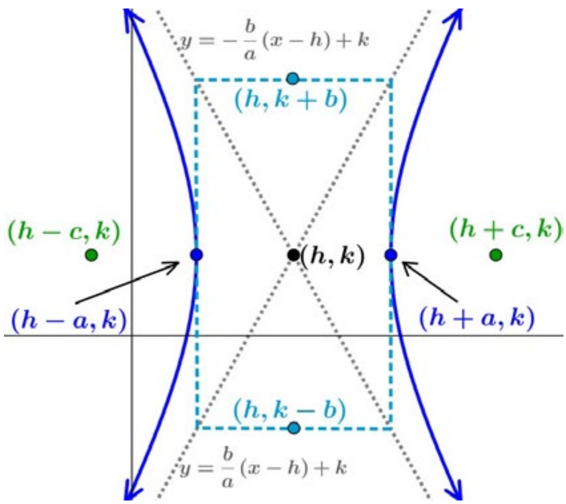
La ecuación de una hipérbola de centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X, es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

- Vértices: $V_1(h-a, k)$, $V_2(h+a, k)$
- Focos: $F_1(h-c, k)$, $F_2(h+c, k)$
- Extremos del eje conjugado: $B_1(h, k-b)$, $B_2(h, k+b)$
- $L_1: x = h - \frac{a}{e}$; $L_2: x = h + \frac{a}{e}$ son las directrices
- $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ son las ecuaciones de las asíntotas. De donde se obtienen: $y - k = \frac{\pm b}{a}(x-h)$

Figura 10. Ecuación ordinaria de la Hipérbola

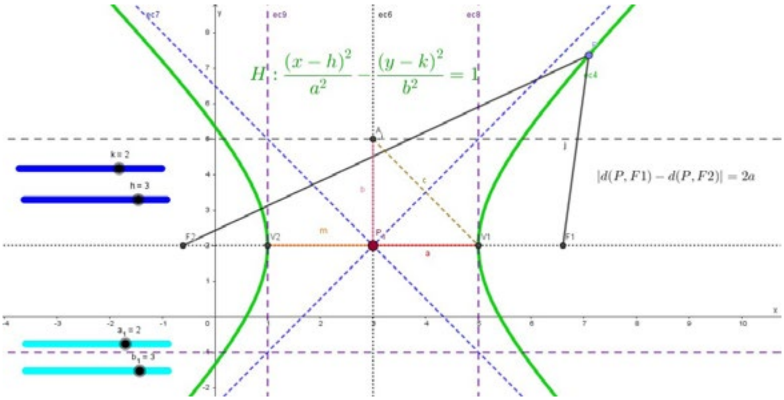


Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Coordenadas de los focos y vértices son:

Centro (h, k);$F_1(h-c, k)$; $F_2(h+c, k)$; $P(x, y)$; $V_1(h-a, k)$; $V_2(h+a, k)$; Ahora se realizará la deducción de la ecuación general de la hipérbola de la siguiente figura:

Figura 11. Aspectos generales de la hipérbola fuera del origen



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Por definición: $d_1 - d_2 = 2a$, $\forall k = 2a$, por definición la distancia en forma general se toma en valor absoluto, en este caso por la forma geométrica se tiene: $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$

Despejando:

$$d(P, F_2) = d(P, F_1) + 2a$$

Es decir: $\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + 2a$ .... (1)

Elevando al cuadrado en (1) y simplificando se tiene:

$(x - h + c)^2 = (x - h - c)^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + 4a^2$ .... (2)

Desarrollando los trinomios en (2) y simplificando:

$c\,(x - h) = a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + a^2$, entonces:

$c\,(x - h) - a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2}$ ... (3)

Elevando al cuadrado en (3):

$c^2(x - h)^2 + a^4 - 2c(x - h)a^2 = a^2[(x - h) - c]^2 + a^2[y - k]^2$ .... (4)

Dado que: $c^2 = a^2 + b^2$ reemplazando en (4) genera:

$(a^2 + b^2)\,(x - h)^2 + a^4 - 2c(x - h)a^2$

$= a^2[(x - h) + c^2 - 2c(x - h)]^2 + a^2[y - k]^2$

Que distribuyendo y simplificando en la ecuación anterior se obtiene:

$b^2(x-h)^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2(y-k)^2$, despejando:

$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$ pero: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 - a^2 = b2$

Entonces:

$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ .... (5)

Dividiendo todos los términos de la ecuación (5) por a^2b^2:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \ldots.(6)$$

Caso B: Eje focal paralelo al eje Y (Vera Gutierrez, 2003).

La ecuación de una hipérbola de centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje Y, es de la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

- Vértices: $V_1(h, k-a)$, $V_2(h, k+a)$
- Focos: $F_1(h, k-c)$, $F_2(h, k+c)$
- Extremos del eje conjugado: $B_1(h-b, k)$, $B_2(h+b, k)$
- $L_1: y = k + \frac{a}{e}$; $L_2: y = k - \frac{a}{e}$ son las directrices
- $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$ son las ecuaciones de las asíntotas.

De donde se obtienen: $y - k = \frac{\pm a}{b}(x-h)$

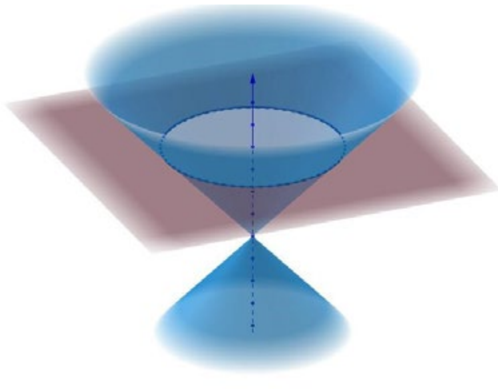
Definición de términos básicos

Capacidad: es un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes cuyo desarrollo y adquisición les permite a las personas enfrentar la realidad en condiciones más favorables. El estudiante toma el conocimiento, construye su conocimiento, usa sus habilidades para realizar con éxito sus actividades, actuando de acuerdo con un sistema de valores formado a lo largo de su vida (Wong, 1999).

Cónica: Figueroa (2018), define sección cónica o simplemente cónica como el conjunto de puntos que forman la intersección de un plano con un cono de revolución de dos ramas. La curva plana que resulta depende de la inclinación del eje del cono respecto al plano que lo corta:

- Si el plano secante es perpendicular al eje del cono, la intersección es una circunferencia.

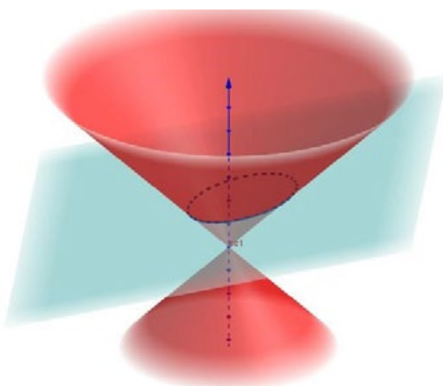
Figura 12. La Circunferencia



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

· Si el plano secante es no es perpendicular al eje del cono y corta a la generatriz, la intersección es una elipse.

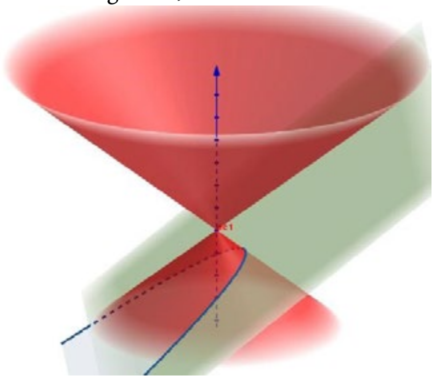
Figura 13. La Elipse



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Si el plano secante es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás, la intersección es una parábola.

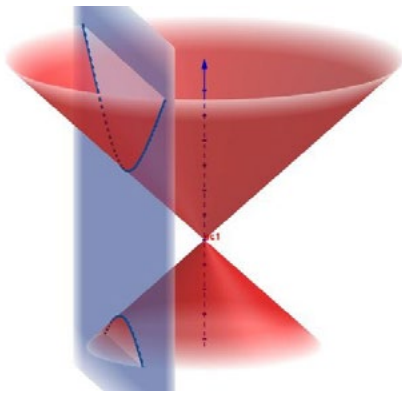
Figura 14. La Parábola



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Si el plano secante corta a dos ramas del cono y no pasa por el vértice, la intersección es una hipérbola.

Figura 15. La Hipérbola



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

Cono de revolución. Sea $l(eje\ del\ cono)$y α una recta y un ángulo dados, sea $P(vertice)$ un punto de l. La superficie formada por todas las rectas que pasan por P y forman un ángulo α, recibe el nombre de **cono de revolución** de dos ramas. Las rectas que pasan por P y que lo forman son las generatrices del cono (Figueroa, 2018).

Conversión de registros: Es una actividad cognitiva que origina transformaciones entre representaciones de distintos registros semióticos (Duval, 2004).

Ecuación general de las cónicas: Las cónicas también se definen algebraicamente mediante la ecuación general de segundo grado de la forma:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

donde A, B, C, E, D, F son constantes (Vera Gutierrez, 2003).

Estrategia didáctica: según Díaz-Barriga Arceo (2010), las define como un conjunto de procedimientos y recursos usados por el docente intencionalmente para el desarrollo de aprendizaje significativos. Estas deben estar orientadas al cumplimiento de los objetivos planteados, promueven la participación de los estudiantes en un determinado contexto de enseñanza y aprendizaje.

Funcionalidad algebraica: es la interfaz del lado izquierdo del GeoGebra en la que se muestran las representaciones algebraicas y numéricas de los objetos matemáticos, permite realizar la modelización matemática a partir de una propuesta teórica y metodológica que representa a un objeto tangible o intangible (Carrillo, 2009).

Funcionalidad gráfica: es la interfaz central del GeoGebra en la que se puede presentar los lugares geométricos relacionados con las representaciones algebraicas en el plano Euclidiano bidimensional y tridimensional realizando una conversión según la teoría de representación semiótica (Carrillo, 2009).

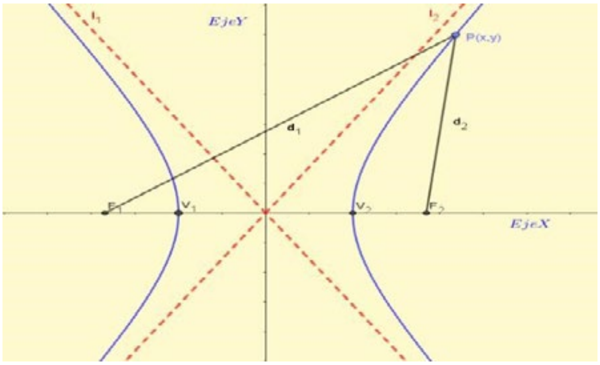
GeoGebra. Es un software de matemáticas que articula de forma dinámica el lenguaje algebraico y gráfico dotado de movimiento que hace más atractivo a la visión del estudiante la interacción de dichos lenguajes, haciéndolo un instrumento o medio educativo apropiado para implementar las estrategias didácticas para el desarrollo de los contenidos curriculares (Carrillo, 2009).

Habilidad de comunicación: es el proceso continuo de hablar, escuchar y entender símbolos verbales y no verbales, permite la comunicación efectiva de ideas, información y conocimientos con un propósito definido (Ahmad, 2016; Coffelt, 2019).

Hipérbola: es el conjunto de todos los puntos $p\,x\,y(\,,\,)$ del plano colocados de tal manera que la diferencia de sus distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos, llamados focos son constante (Figueroa, 2018).

$$H = \left\{ p(x,y) \in R^2 \,/\, d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a \right\}$$

Figura 16. Lugar Geométrico de la Hipérbola



Fuente: Ramírez Carrasco (2025), usando GeoGebra

$|d_1 - d_2| = k, \quad \forall k = 2a \;\; es\ constante\ F_1, F_2 : Focos\ V_1, V_2 : Vértices$

Lugar geométrico: la sección cónica se define como el lugar geométrico trazado por un punto que se mueve de tal manera que sus distancias no dirigidas a un punto fijo (foco), y una recta fija(directriz), están en relación constante positiva (excentricidad) (Figueroa, 2018).

Registro de representación verbal: es una de las formas de representación de los objetos matemáticos que implica un nivel de abstracción de dichos objetos y comunicar sus cualidades y emitir juicios de valor (Duval, 2004).

Representación semiótica: es el proceso de utilizar símbolos y signos para definir o conceptualizar objetos o ideas, facilitando la comprensión y comunicación de información, en dichos procesos se tiene como elementos el signo, el objeto de interés y el que interpreta o comunica las cualidades del objeto (Duval, 2004)

Tratamiento de registros: es una actividad cognitiva que promueve una transformación entre representaciones de un mismo registro semiótico (Duval, 2004).

Capítulo 3

Un Estudio Cuantitativo sobre la Enseñanza de la Hipérbola en Estudiantes de Economía

La investigación es de enfoque cuantitativo porque se basa en la medición y análisis de datos numéricos obtenidos a partir de los criterios de evaluación de las competencias en la asignatura de Geometría Analítica sobre la hipérbola. Además, se emplea el software GeoGebra como estrategia metodológica para mejorar la representación y comunicación de ideas matemáticas, permitiendo cuantificar su impacto en el desempeño de los estudiantes de Economía de la Universidad Nacional de Piura.

Las calificaciones obtenidas por los estudiantes se expresan en una escala vigesimal, lo que refuerza la naturaleza cuantificable del estudio.

Por su orientación, la investigación es de tipo aplicada, ya que parte del diagnóstico de la realidad académica de estudiantes matriculados en años anteriores en la asignatura de Geometría Analítica. Este diagnóstico sirve de base para la ejecución del estudio, con el propósito de obtener mejores resultados en el aprendizaje de dicha asignatura durante el año 2024.

Asimismo, la investigación es de nivel descriptivo, pues a través del análisis de los estadísticos estimados se describen características del manejo de los aspectos algebraicos, aritméticos, gráficos y comunicativos de la hipérbola. Estos aspectos requieren un esfuerzo cognitivo significativo, así como el dominio de contenidos conceptuales y procedimentales en matemática.

Diseño Cuasi-experimental en la Enseñanza de Geometría Analítica

El diseño de esta investigación fue cuasi experimental, transversal correlacional, con posprueba y grupos intactos. Para su implementación, se trabajó con dos aulas de estudiantes de Economía de la Universidad Nacional de Piura matriculados en la asignatura de Geometría Analítica del año académico 2024-1.

En primer lugar, los estudiantes fueron nivelados en los prerrequisitos relacionados con los lugares geométricos de circunferencia, parábola y elipse, que constituían los conocimientos previos necesarios. Una vez que las secciones fueron balanceadas, se realizó un sorteo para asignar el grupo experimental y el grupo control.

Durante la fase de experimentación o intervención, el grupo experimental desarrolló el módulo aprendizaje de hipérbola utilizando el software GeoGebra como recurso didáctico, mientras que el grupo control abordó el mismo módulo sin el uso de esta herramienta. Concluida la intervención, ambos grupos fueron evaluados bajo las mismas condiciones conceptuales y procedimentales para medir su capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola. Los resultados obtenidos fueron comparados, comprobándose lo que se esperaba, que el resultado sea favorable para el grupo experimental. Adicionalmente, se evaluó el aspecto actitudinal del grupo experimental mediante un cuestionario que recogió datos sobre la dimensión interactiva del software GeoGebra y la capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre el desarrollo de la dimensión interactiva de las hipérbolas. En el caso del grupo de control, se aplicó el mismo instrumento en una versión adaptada sin el uso de GeoGebra. Posteriormente se compararon los resultados entre ambos grupos, observándose que las calificaciones fueron más favorables en el grupo experimental.

La información generada proporcionó los argumentos para validar las hipótesis de investigación, en las que se establece la relación de causa–efecto por el uso del GeoGebra y su inlfuencia en la capacidad de comunicación y representación de ideas matemáticas.

Esquema del diseño cuasi experimental

NRGE: X O_1

NRGC: —- O_2

NRGE: grupo experimental sin asignación aleatoria de unidades muéstrales, recibe tratamiento.

NRGC: grupo control sin asignación aleatoria de unidades muéstrales, no recibe tratamiento.

X: tratamiento, aplicación del GeoGebra en el desarrollo del módulo de aprendizaje

—-: no hay tratamientos se desarrolla el módulo de aprendizaje sin aplicación del GeoGebra

O1: medición con la posprueba al grupo experimental

O2: medición con la posprueba al grupo control

Contexto de Investigación

Hernández et al. (2015), mencionan que “La población o universo es el conjunto de casos que concuerdan con unas especificaciones dadas. (...) es preferible establecer las características con la finalidad de delimitar los parámetros muéstrales” (p. 207).

El estudio se realizaró en la Universidad Nacional de Piura, en la Facultad de Economía, situada en Urb.Miraflores S/N, Castilla, Piura; con una población conformada por 86 estudiantes matriculados en la asignatura de geometría analítica en el año 2024-I

Tabla 1. Secciones de geometría analítica 2024-1

	Sección	Población
	01	44
	02	42
Total		86

Fuente: secretaria Académica Facultad de Economía.

Muestra

Hernández et al. (2015), mencionan que la muestra es en esencia, un subgrupo de la población. Digamos que es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos población. La muestra censal considera a todas las unidades de la población por considerarlas manejables en el estudio.

En la presente investigación, se tuvo un tamaño poblacional pequeño, por tanto, el tamaño de la muestra es igual al tamaño de la población, en aplicación de la definición de muestra censal, por tanto, el tamaño de la muestra es 86 estudiantes. Cuando el tamaño de la muestra converge al tamaño de la población, se estima el parámetro poblacional de forma insesgada o con un sesgo que tiende a cero.

De acuerdo con esto la muestra estará conformada por 86 estudiantes de la asignatura de geometría analítica de la Facultad de Economía de la Universidad Nacional de Piura matriculados en el año 2024, distribuidos en dos secciones, donde una de ellas será grupo experimental y el otro grupo control.

Interacción Digital y Aprendizaje Matemático

Operacionalización de variables

A. Variable independiente: dimensión interactiva del software GeoGebra

Definición conceptual

El GeoGebra es un software de matemática dinámico para construcciones algebraicas y geométricas para resolver situaciones de cálculo y su representación gráfica (Carrillo, 2009).

Definición operacional

El software GeoGebra es un programa que tiene la funcionalidad de realizar operaciones algebraicas y representaciones gráficas que hace que el proceso de aprendizaje sea contextualizado y fácil de interpretar los resultados.

B. Variable dependiente: capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre el desarrollo de la dimensión interactiva de las hipérbolas.

Definición conceptual

La capacidad de comunicación y representación de ideas matemáticas sobre cónicas en $\mathbb{R}^2$ que activan la capacidad cognoscitiva y el dominio de contenidos conceptuales y prácticos orientados a perfilar una competencia (Alcca Alahui, 2019).

Definición operacional

La capacidad de comunicación y representación de ideas sobre hipérbolas en el plano, son habilidades intelectuales de los estudiantes que las articulan asimilando los lineamientos teóricos y prácticos para resolver ejercicios y problemas de interés.

Dimensiones

Y_1: Capacidad de representación de ideas matemáticas

Indicadores:

Tratamiento de registros.

Conversión de registros.

Representación semiótica.

Y_2: Capacidad de comunicación de ideas matemáticas ü Registro de representación verbal.

Habilidad de comunicación.

Tabla 2. Matriz de Operacionalización de variables

Variable	**Definición conceptual**	**Definición operacional**	**Dimensiones**	**Indicadores**
Variable Independiente: Dimensión interactiva del software GeoGebra	El GeoGebra es un software de matemática dinámico para construcciones algebraicas y geométricas para resolver situaciones de cálculo y su representación gráfica. Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019)	El GeoGebra es un programa que tiene la funcionalidad de realizar operaciones algebraicas y representaciones gráficas que hace que el proceso de aprendizaje sea contextualizado y fácil de interpretar los resultados		
Variable dependiente: Capacidad de comunicación y representación de ideas matemáticas sobre la interactividad de la hipérbola	La capacidad de comunicación y representación de la dimensión interactiva de las hipérbolas activan la capacidad cognoscitiva y el dominio de contenidos conceptuales y prácticos orientados a perfilar una competencia. Alca Alauí, S., & Comilla Quispe, M. (2019)	La capacidad de comunicación y representación de ideas sobre la dimensión interactiva de las hipérbolas son habilidades intelectuales de los estudiantes que las articulan a los lineamientos teóricos y prácticos para resolver ejercicios y problemas de interés.	Capacidad de representar ideas matemáticas	Capacidad de representación gráfica
				Capacidad de representación algebraica
				Capacidad de conversión
				Capacidad de representación
			Capacidad de comunicar ideas matemáticas	Capacidad de representación verbal
				Capacidad de comunicación

Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Técnicas e instrumento de recolección de datos

Cáceres (2016), define al módulo de aprendizaje como una sesión de clase construida siguiendo una metodología didáctica que incorpora herramientas, estrategias, o actividades de instrucción y experiencias de aprendizaje, desarrolladas en periodos de tiempo cortos, asimismo, contiene criterios de evaluación, que buscan atraer la atención del aprendiz. El módulo de aprendizaje es un instrumento ideal de recolección de datos para evaluar la autonomía de los estudiantes en la construcción de sus aprendizajes (Mancilla, 2005).

La medición de las variables de estudio requiere de la elaboración de un módulo de aprendizaje sobre lineamientos teóricos y prácticos de la hipérbola, su desarrollo se aplicará al grupo experimental con el uso del GeoGebra y al grupo control sin uso del GeoGebra, en este proceso se evalúan en ambos grupos mediante pruebas de conocimientos y actividades de resolución de problemas sobre hipérbola, la representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola.

La validez determina la evidencia suficiente para dar unos argumentos científicos para el análisis e interpretación de las puntuaciones de los ítems de un test, estas pueden concurrir de diferentes fuentes que pueden ser de estructura interna: de contenido y del proceso de respuesta; estructura externa: en relación con otras variables y las consecuencias del test (Oliden, 2003).

El Alfa de Cronbach es un estadígrafo que permite determinar la varianza de los ítems y la varianza de la prueba total, ponderada por el número total de ítems, para medir consistencia interna del test (Ledesma, 2002).

La post prueba, se validó mediante el juicio de cinco expertos que analizaron la calidad de su contenido de las preguntas formuladas, considerando su pertinencia, coherencia, relevancia, consistencia y adecuación, discriminando si las preguntas de la prueba de la hipérbola miden las dimensiones de las variables de estudio y están contenidas en el contexto de las bases teóricas descritas, entonces, se determina si el resultado promedio de la validación fuera de 90% a más, indica que existe un alto índice de correspondencia entre los criterios de evaluación que aplicaron los especialistas y por ende el instrumento es válido para medir las variables de estudio para determinar si el uso del software GeoGebra mejora la representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola.

La confiabilidad de la prueba de conocimientos y actividades de resolución de problemas sobre hipérbola, se determinará mediante una muestra piloto arbitraria de 20 estudiantes con sus calificaciones obtenidas en cada pregunta se organizará en una matriz de calificaciones con las que se estimará la confiabilidad alfa de Cronbach, si su coeficiente es mayor o igual a 0.70, indica que el instrumento es confiable para recoger datos de las variables porque contribuyen a valorar los atributos latentes en la población de estudio.

En la presente propuesta de investigación se procedió a evaluar el instrumento de recolección de datos, consistente en una post-prueba que contiene un conjunto de 5 preguntas en las cuales están incluidos 15 ítems, que evalúan la “Dimensión interactiva de las hipérbolas para representar y comunicar ideas matemáticas con GeoGebra”:

Con respecto a la post-prueba, se aplicó la validación mediante juicio de expertos, la implementación se realizó a través de cinco expertos profesionales en educación o ciencias de la educación, cuyo resultado más frecuente en escala cualitativa fue "Muy Buena Validez", lo cual indica que la post-prueba goza de la propiedad de validez porque el conjunto de preguntas diseñadas para evaluar las variables de estudio están encuadradas en los aspectos teóricos – prácticos que sustentan la propuesta de investigación.

Con respecto a la confiabilidad de la post-prueba, se aplicó el Alfa de Cronbach para los 15 ítems, las mismas que tuvieron que ser depuradas 4 ítems porque no aportan información importante para medir las variables de estudio, por tanto, las 11 preguntas importantes reportan un Alfa de Cronbach de 0.738 que revela que la post-prueba es confiable porque denota consistencia interna de las puntuaciones individuales de las preguntas con respecto a la puntuación total de la post-prueba; por consiguiente, se infiere que el instrumento de recolección de datos goza de la propiedad de fiabilidad o confiabilidad.

Técnicas de procesamiento y análisis de datos

El desarrollo del módulo de aprendizaje de hipérbola con uso y sin uso del GeoGebra permitió obtener datos de los contenidos conceptuales y procedimentales del aprendizaje de los estudiantes, que fueron organizados en una hoja de cálculo y posteriormente en el software estadístico SPSS para luego ser procesados de acuerdo a los objetivos de investigación y los métodos de la estadística descriptiva e inferencial, Esto permitió demostrar si efectivamente el uso del software GeoGebra influye en forma directamente proporcional en la capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre el desarrollo de la hipérbola en estudiantes de Economía.

a) Estadística descriptiva

La estadística descriptiva proporciona un conjunto de métodos y técnicas para resumir información en cuadros o tablas, graficas o figuras, cuyo propósito es brindar evidencia objetiva suficiente para contrastar hipótesis (Rendón-Macías, 2016).

En el estudio se presenta la información en tablas y gráficos estadísticos que describen las características de la Capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre el desarrollo de la hipérbola en el plano, por efecto de las bondades del GeoGebra con su dimensión interactiva.

b) Prueba de hipótesis para comparar los resultados del post test

La hipótesis de investigación es una proposición aseverativa que postula la respuesta tentativa al problema de investigación que tiene el carácter de ser verdadera o falsa, en tanto que, la estadística tiene la finalidad de obtener información de los datos y analizar las evidencias para tomar una decisión, (Monterrey y Gómez, 2007), para el proceso de validar las hipótesis comparativas, se utilizará los métodos de la estadística inferencial paramétrica si las puntuaciones del módulo de aprendizaje se distribuyen con un comportamiento normal, caso contrario con los métodos de la estadística no paramétrica, en cualquiera de las estadísticas se pretende estimar el pvalor asociado al estadígrafo de contraste que puede ser el t de Student para la diferencia de promedios en la inferencia paramétrica o su equivalente en la inferencia no paramétrica la prueba U de Mann Whitney, que conduce a tomar la decisión de aceptar la hipótesis estadística como cierta con un alto grado de confianza, siempre y cuando las puntuaciones sean mayores para el grupo experimental cuyo efecto se atribuye a la aplicación del GeoGebra para el aprendizaje de las diferentes representaciones semióticas de la hipérbola y que contribuye a mejorar la capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre el desarrollo de la hipérbola.

Para el procesamiento y análisis de los datos recolectados, se siguieron los siguientes pasos:

- **Codificación de respuestas:** las respuestas del cuestionario fueron codificadas para facilitar su análisis. Cada opción de respuesta se asignó un valor numérico para su posterior procesamiento estadístico.
- **Entrada de datos:** los datos codificados se ingresaron en una base de datos utilizando software especializado en análisis estadístico, como SPSS versión 27.
- **Análisis descriptivo:** se realizaron análisis descriptivos para resumir las características básicas de los datos recolectados. Esto incluyó el cálculo de frecuencias, porcentajes, medias y desviaciones estándar para cada una de las preguntas del cuestionario.
- **Pruebas de hipótesis:** se llevaron a cabo pruebas estadísticas para evaluar las hipótesis planteadas en el estudio. Para ello, se utilizaron pruebas t para muestras relacionadas, comparando los niveles de competencia antes y después de la aplicación de la simulación computacional.
- **Interpretación de resultados:** los resultados obtenidos se interpretaron en el contexto del estudio, relacionándolos con los objetivos planteados y las hipótesis formuladas. Se identificaron patrones y tendencias en los datos, y se discutieron las implicaciones educativas de los hallazgos.

Capítulo 4
Resultados de una Intervención Educativa en Economía

En el capítulo de los resultados, los datos recolectados fueron analizados meticulosamente utilizando una variedad de herramientas estadísticas para responder a las preguntas planteadas en el informe de investigación. Se emplearon tanto análisis descriptivos como inferenciales, lo que permitió obtener una visión integral de la información recolectada.

Para evaluar la efectividad del uso de GeoGebra en la representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola, se realizaron pruebas estadísticas, incluyendo el t-test para comparar las medias antes y después de la implementación del software.

A continuación, se presentan los resultados detallados de estos análisis:

Nivel de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre hipérbolas en un contexto tradicional

OE1: evaluar sin GeoGebra el nivel de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de economía en la universidad nacional de Piura 2024.

De la muestra se obtuvo los siguientes resultados:

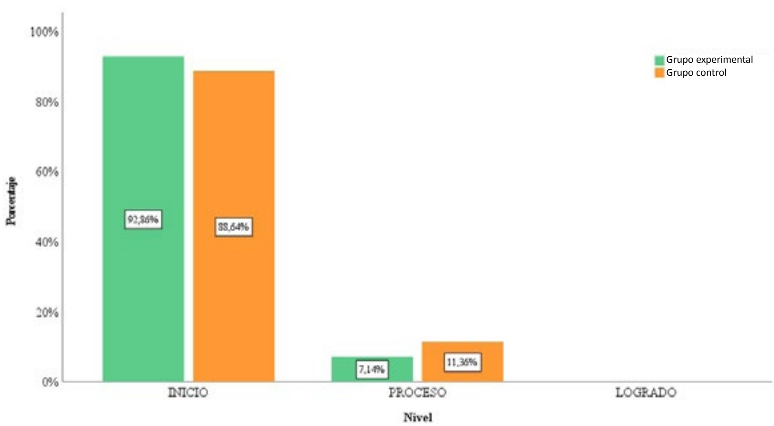
Tabla 3. Representación matemática de hipérbolas en economía

	Pre-Test			
NIVEL	**Grupo Control**		**Grupo Experimental**	
	Frecuencia	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
INICIO	39	88.6%	39	92.9%
PROCESO	5	11.4%	3	7.1%
LOGRADO	0	0%	0	0%
TOTAL	44	100%	42	100

Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Nota: obtenida de la Guía de Observación.

Figura 17. Representación matemática de hipérbolas en economía pre-GeoGebra



Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Los resultados de la Tabla 1 y la Figura 1 correspondientes al pre-test revelan que tanto el grupo control como el grupo experimental tienen niveles iniciales de comprensión y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola muy similares. La mayoría de los estudiantes en ambos grupos (92.9% y 88.64%) se encuentran en el nivel de inicio, con una pequeña proporción en el nivel de proceso (7.1% y 11.36%) y ninguno en el nivel logrado.

La intervención con GeoGebra tiene un gran potencial para mejorar la comprensión y la comunicación matemática de los estudiantes, dado que sus puntos de partida son comparables y mayoritariamente bajos. Al analizar y comparar los resultados posteriores, se puede evaluar con precisión el impacto de GeoGebra en el aprendizaje de los conceptos de la hipérbola, proporcionando evidencia significativa sobre su efectividad en la educación matemática.

Impacto del GeoGebra en la representación y comunicación matemática sobre hipérbolas

OE2: analizar como el software GeoGebra mejora el nivel de representación y comunicación sobre la hipérbola en estudiantes de economía en la universidad nacional de Piura 2024

De la muestra se obtuvo los siguientes resultados:

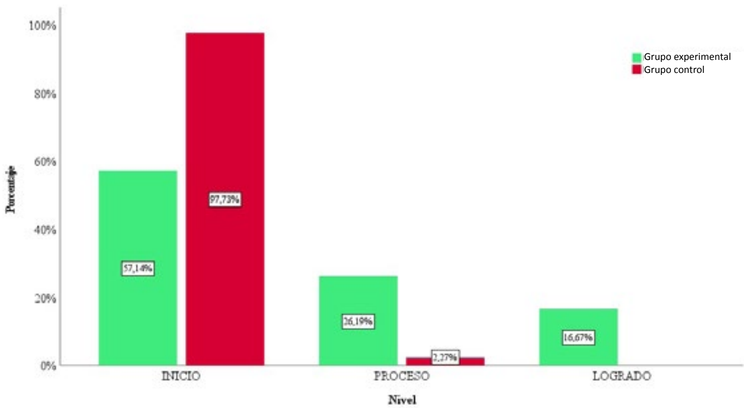
Tabla 4. GeoGebra mejora representación de hipérbolas en economía

	Post-Test			
NIVEL	**Grupo Control**		**Grupo Experimental**	
	Frecuencia	**Porcentaje**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
INICIO	43	97.7%	24	57.1%
PROCESO	1	2.3%	11	26.2%
LOGRADO	0	0%	7	16.7%
TOTAL	44	100%	42	100

Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Nota: obtenida de la Guía de Observación.

Figura 18. Resultados post-Test de la aplicación del Geogebra en la comunicación y representación de ideas matemáticas sobre hipérbola



Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Los resultados de la Tabla 1 y la Figura 1 correspondientes al post-test muestran que el grupo experimental, que utiliza GeoGebra, tiene una mejora significativa en comparación con el grupo control. Mientras que el 97.7% del grupo control permanece en el nivel de inicio y solo el 2.3% avanza al nivel de proceso, el grupo experimental tiene un 57.1% en el nivel de inicio, un 26. % en el nivel de proceso y un notable 16.7% alcanza el nivel logrado. Estos resultados sugieren que GeoGebra facilita una comprensión y comunicación más efectiva de las ideas matemáticas sobre la hipérbola.

Comparando ambos grupos, queda claro que la intervención con GeoGebra tiene un impacto positivo considerable. El grupo experimental muestra una reducción en el nivel de inicio y aumentos significativos en los niveles de proceso y logrado, evidenciando la efectividad de GeoGebra como herramienta educativa para mejorar los resultados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. Estos hallazgos subrayan la importancia de integrar tecnologías interactivas en la enseñanza para elevar el nivel educativo.

Comparación de resultados con y sin GeoGebra

OE3: comparar el nivel de GeoGebra sin aplicar y después de aplicarlo en la representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de economía en la universidad nacional de Piura, 2024.

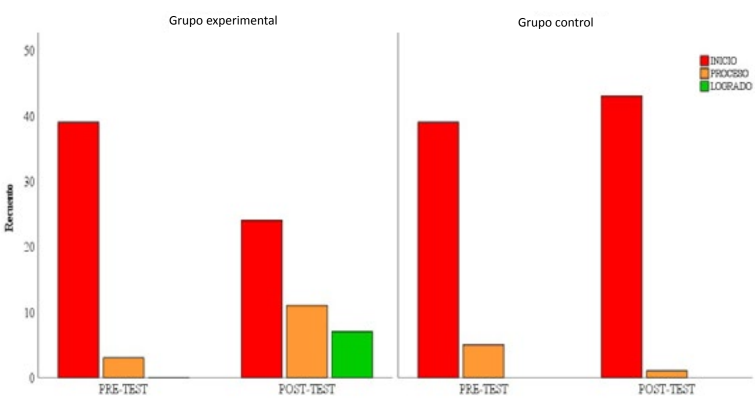
Tabla 5. Impacto comparado de GeoGebra en estudiantes de Economía

	Pre-Test				**Post-Test**			
	Grupo Control		**Grupo Experimental**		**Grupo Control**		**Grupo Experimental**	
	n	**%**	**n**	**%**	**n**	**%**	**n**	**%**
Inicio	39	88.6%	39	92.9%	43	97,7%	24	57,1%
Proceso	5	11.4%	3	7.1%	1	2,3%	11	26,2%
Logrado	0	0%	0	0%	0	0,0%	7	16,7%
Total	44	100%	42	100%	44	100%	42	100%

Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Nota: obtenida de la Guía de Observación.

Figura 19. Evolución de la representación de ideas matematicas sobre hipérbola con GeoGebra



Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Según la tabla 3, se interpreta que, para el Grupo Control: Según el pretest, el 88.6% de los estudiantes en el grupo control se encuentra en el nivel de inicio y el 11.4% en el nivel de proceso. No hay estudiantes en el nivel logrado, lo que indica que la mayoría de los estudiantes tiene una comprensión básica de las ideas matemáticas sobre la hipérbola antes de cualquier intervención. Después de la intervención sin GeoGebra, el 97.7% de los estudiantes en el grupo control permanece en el nivel de inicio y solo el 2.3% avanza al nivel de proceso. No hay estudiantes en el nivel logrado, lo que sugiere que la falta de intervención con GeoGebra no produce mejoras significativas en la comprensión y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en este grupo.

En consiguiente, para el grupo experimental: Según el pre-test, el cual es similar al grupo control, el 92.9% de los estudiantes en el grupo experimental está en el nivel de inicio y el 7.1% en el nivel de proceso, sin ningún estudiante en el nivel logrado. Esto muestra que ambos grupos tienen puntos de partida comparables. Después de la intervención con GeoGebra, el grupo experimental muestra una mejora notable: el 57.1% de los estudiantes se mantiene en el nivel de inicio, el 26.2% avanza al nivel de proceso, y un 16.7% alcanza el nivel logrado. Estos resultados indican que la intervención con GeoGebra es efectiva para mejorar la comprensión y la comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en comparación con el grupo control.

Por ende, los datos del post-test destacan que el uso de GeoGebra en el grupo experimental facilita una mejoría significativa en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos en comparación con el grupo control, subrayando la efectividad de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza.

Optimización de los aprendizajes sobre hipérbola a través de GeoGebra

OG: evaluar como el software Geogebra optimiza las operaciones de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de economía en la universidad nacional de Piura, 2024.

Para determinar si el uso del software GeoGebra mejora la representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de

Economía de la Universidad Nacional de Piura en 2024, se utilizará la prueba T para muestras apareadas.

A continuación, se presenta el desarrollo:

Hipótesis

H_0: No hay diferencias significativas entre los resultados del grupo control y el experimental.

H_1: Hay diferencias significativas entre los resultados del grupo control y el experimental.

1. Nivel de Significancia: El nivel de significancia será del 5%
2. Estadístico de Prueba: Prueba T para muestras aparejadas
3. Resultados:

Tabla 6. Prueba de muestras emparejadas del postest de los grupos control y experimental

	Diferencias emparejadas				t	gl	Sig. (Bilateral)
	Media	Desviación estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia				
			Inferior	Superior			
E: POST-TEST C: POST-TEST	4,09524	5,77974	2,29415	5,89633	4,592	41	0,001

Fuente: Ramírez Carrasco (2025).

Interpretación: La Tabla 6 muestra los resultados de una prueba T para muestras apareadas, comparando los resultados del post-test entre el grupo experimental (E: POST-TEST) y el grupo control (C: POST-TEST). Los datos indican una diferencia significativa en las puntuaciones post-test entre ambos grupos, con una media de diferencia de 4,095 y una desviación estándar de 5,779. El intervalo de confianza del 95% para la diferencia varía entre 2,294 y 5,896. El valor t es 4,592 con 41 grados de libertad, y la significancia bilateral es 0,001, lo que indica que la diferencia observada es estadísticamente significativa, rechazando la hipótesis nula. Además, dado que el valor t es positivo, esto indica que el grupo experimental tiene un rendimiento significativamente mejor que el grupo control en el post-test. Por lo tanto, se concluye que el uso del software GeoGebra tiene un efecto positivo y significativo en la mejora de la representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en los estudiantes del grupo experimental.

Aplicación del módulo didáctico en la investigación correlacional

Si bien la presente investigación se ha diseñado con un enfoque correlacional para determinar la relación entre el uso del software GeoGebra y la capacidad de representación y comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola, durante el proceso investigativo se implementó un módulo didáctico para los estudiantes del grupo experimental. Este módulo tenía como objetivo proporcionar una experiencia de aprendizaje enriquecida, facilitando la comprensión de la hipérbola a través de la visualización y manipulación de representaciones dinámicas con GeoGebra.

El desarrollo del módulo permitió que los estudiantes del grupo experimental interactuaran activamente con los conceptos matemáticos, explorando la relación entre la ecuación de la hipérbola y sus representaciones gráficas. La estructura del módulo promovió el tratamiento dentro de un mismo registro, como la manipulación algebraica de ecuaciones de la hipérbola y su posterior graficación en GeoGebra. Además, se fomentó la conversión entre registros, permitiendo a los estudiantes transitar del registro algebraico al gráfico y viceversa, facilitando la identificación de características geométricas clave, como los vértices, focos y asíntotas. Esta interacción entre registros fortaleció la capacidad de comunicación matemática, ya que los estudiantes pudieron explicar con mayor claridad la relación entre las ecuaciones y sus representaciones visuales.

Diversos estudios respaldan la importancia de la conversión entre registros en el aprendizaje de las matemáticas. Duval (2004), enfatiza que la conversión entre registros, como el paso del lenguaje algebraico a la representación gráfica, es un proceso cognitivo complejo que requiere una comprensión profunda del concepto matemático. Asimismo, investigaciones recientes han señalado que la incorporación de tecnologías como GeoGebra favorece la integración de múltiples registros y mejora la comprensión de conceptos abstractos.

Esta intervención no solo complementó el estudio correlacional, sino que también sirvió para observar de manera más precisa el impacto de GeoGebra en el aprendizaje. Los resultados obtenidos evidenciaron que los estudiantes del grupo experimental lograron mejoras significativas en comparación con el grupo control, lo que sugiere que la integración de herramientas tecnológicas como GeoGebra es una estrategia efectiva para fortalecer la enseñanza de la geometría analítica. En particular, los estudiantes que lograron una mejor articulación entre registros semióticos mostraron mayor precisión en la justificación de sus respuestas y en la argumentación matemática, lo que demuestra que el dominio de estas transiciones potencia la capacidad de comunicar ideas matemáticas de manera efectiva.

Registros de representación semiótica y su impacto en la comunicación matemática

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval sostiene que la comprensión matemática depende de la capacidad de los estudiantes para tratar y convertir información entre diferentes representaciones. En el contexto del aprendizaje de la hipérbola con GeoGebra, se identificaron los siguientes registros fundamentales:

1. **Registro algebraico:** representado por ecuaciones de la hipérbola en sus distintas formas, proporcionando la expresión simbólica de la relación matemática.
2. **Registro gráfico:** expresado mediante la construcción visual de la hipérbola en el plano cartesiano, facilitando la identificación de elementos clave como focos, vértices y asíntotas.
3. **Registro numérico:** presente en la tabulación de valores que permiten verificar puntos de la curva.
4. **Registro verbal:** involucra la descripción oral o escrita de las propiedades y relaciones de la hipérbola.

El uso de GeoGebra permitió que los estudiantes pasaran de manera fluida entre estos registros, promoviendo una comprensión más profunda del concepto. Por ejemplo, al ingresar la ecuación de una hipérbola en el software y observar su representación gráfica, los estudiantes realizaron conversiones entre el registro algebraico y el gráfico. De manera similar, al analizar los valores de coordenadas y relacionarlos con la ecuación, se efectuaron conversiones entre los registros numérico y algebraico.

Esta interacción constante entre registros fortaleció la capacidad de comunicación matemática de los estudiantes, ya que pudieron justificar sus respuestas y explicar sus razonamientos con mayor precisión. En la evaluación post-test, se evidenció que los estudiantes que lograron mayor dominio en la conversión de registros también mejoraron significativamente en la comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola.

Impacto de GeoGebra en el Aprendizaje Matemático

Los resultados de esta investigación demuestran de manera contundente que el uso del software GeoGebra tiene un efecto significativo en el aprendizaje de conceptos matemáticos, particularmente en temas complejos como las hipérbolas. Los datos recopilados revelan que el grupo experimental, que empleó GeoGebra como herramienta de apoyo, superó ampliamente al grupo control en las evaluaciones posteriores a la intervención. Este avance no solo se reflejó en las calificaciones, sino también en la capacidad de los estudiantes para representar y comunicar ideas matemáticas de manera más clara y precisa. La facilidad con la que GeoGebra permite manipular representaciones gráficas y algebraicas parece ser un factor clave en este progreso, ya que los estudiantes lograron establecer conexiones más sólidas entre diferentes registros semióticos.

Además, los hallazgos de este estudio respaldan investigaciones previas que destacan el papel de las herramientas tecnológicas en la educación matemática. En particular, se observó que GeoGebra no solo mejora la comprensión teórica, sino que también fomenta un aprendizaje más activo y participativo. Los estudiantes que utilizaron el software mostraron una mayor disposición para explorar conceptos por su cuenta, lo que sugiere que la herramienta promueve la autonomía y la curiosidad intelectual. Este aspecto es fundamental en un contexto educativo donde el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas es prioritario. La capacidad de GeoGebra para presentar información de manera interactiva y dinámica parece ser un elemento determinante en este proceso, ya que facilita la experimentación y el descubrimiento guiado.

Implicaciones Educativas y Futuras Investigaciones

Los resultados obtenidos tienen importantes implicaciones para la práctica docente, especialmente en áreas donde los estudiantes suelen enfrentar dificultades con conceptos abstractos. La integración de GeoGebra en el currículo matemático no solo podría mejorar el rendimiento académico, sino también reducir la ansiedad y la resistencia que muchos alumnos experimentan hacia esta disciplina. Los docentes que adopten esta herramienta tendrían la oportunidad de diseñar clases más dinámicas, donde la visualización y la manipulación de objetos matemáticos jueguen un papel central. Esto no solo beneficiaría a los estudiantes con mayores dificultades, sino que también ofrecería a los más avanzados la posibilidad de profundizar en temas complejos mediante la exploración autónoma.

Sin embargo, es importante reconocer que el éxito de GeoGebra como recurso didáctico depende en gran medida de la formación docente y del acceso a infraestructura tecnológica adecuada. Futuras investigaciones podrían explorar cómo adaptar esta herramienta en contextos con limitaciones de recursos, así como evaluar su impacto a largo plazo en el desempeño académico. Además, sería valioso estudiar cómo combinar GeoGebra con otras metodologías activas, como el aprendizaje basado en proyectos o la flipped classroom, para maximizar sus beneficios. La evidencia sugiere que, cuando se usa de manera estratégica, GeoGebra no solo es útil para enseñar contenidos específicos, sino que también puede transformar la manera en que los estudiantes perciben y se relacionan con las matemáticas.

En conclusión, esta investigación refuerza la idea de que las herramientas tecnológicas, cuando se integran de manera pedagógicamente sólida, tienen el potencial de revolucionar la enseñanza de las matemáticas. GeoGebra, en particular, se posiciona como un recurso invaluable para facilitar la comprensión de conceptos abstractos, promover la comunicación matemática y fomentar un aprendizaje más significativo. Los hallazgos presentados no solo aportan evidencia empírica sobre su eficacia, sino que también abren nuevas líneas de investigación para seguir explorando su impacto en diferentes contextos educativos. La adopción generalizada de este tipo de tecnologías podría ser un paso crucial hacia una educación matemática más inclusiva, dinámica y efectiva.

Conclusiones sobre el Impacto de GeoGebra en el Aprendizaje

Los resultados de este estudio confirman que GeoGebra es una herramienta altamente efectiva para mejorar la comprensión y comunicación de conceptos matemáticos relacionados con la hipérbola. Los estudiantes que utilizaron el software mostraron un desempeño académico superior en comparación con aquellos que siguieron métodos tradicionales. Esta ventaja se evidenció no solo en la resolución de problemas, sino también en la capacidad de expresar ideas matemáticas con mayor claridad y coherencia. La interacción dinámica con representaciones gráficas y algebraicas permitió a los alumnos desarrollar una comprensión más profunda de las propiedades de la hipérbola, facilitando así un aprendizaje más significativo.

Además, GeoGebra demostró ser especialmente útil en el tratamiento y conversión de registros semióticos, habilidades fundamentales en el estudio de las matemáticas avanzadas. Los estudiantes lograron transitar con mayor fluidez entre representaciones algebraicas, gráficas y verbales, lo que les permitió abordar problemas desde múltiples perspectivas. Este hallazgo refuerza la importancia de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza, ya que no solo mejoran la precisión en el trabajo matemático, sino que también fomentan un pensamiento más flexible y analítico. La capacidad de visualizar conceptos abstractos de manera interactiva resultó clave para consolidar el aprendizaje.

Recomendaciones para la Implementación de GeoGebra

Para maximizar los beneficios de GeoGebra, se recomienda que las instituciones educativas lo incorporen de manera formal en los programas de Geometría Analítica. Su uso sistemático puede transformar la enseñanza en un proceso más dinámico y participativo, donde los estudiantes exploren activamente los conceptos en lugar de limitarse a recibir información. Los docentes deberían recibir capacitación continua para aprovechar al máximo las funcionalidades del software, diseñando actividades que promuevan la experimentación y el descubrimiento guiado. Este enfoque no solo mejoraría el rendimiento académico, sino también la motivación hacia las matemáticas.

Otra recomendación clave es realizar evaluaciones diagnósticas previas a la implementación de GeoGebra, con el fin de identificar las necesidades específicas de los estudiantes. Esto permitiría adaptar las estrategias didácticas para reforzar áreas débiles y potenciar las habilidades existentes. Asimismo, se sugiere desarrollar módulos de enseñanza estructurados que integren el software de manera progresiva, asegurando que los alumnos dominen tanto los conceptos teóricos como las herramientas tecnológicas. Finalmente, futuras investigaciones deberían explorar el impacto de GeoGebra en otros temas matemáticos, así como en diferentes niveles educativos, para consolidar su papel como recurso pedagógico esencial en la educación moderna.

Referencias

Aguilar Hito, A. E. (2018). *Metodología con el software Geogebra para desarrollar la capacidad de comunica y representa ideas matemáticas con funciones lineales*. Universidad de Piura.

Amaya de Armas, T. R. (2016). Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática*, 28(3), 111-144.

Apaza, F. J. (2020). *Aplicación del software Geogebra y su influencia en el logro de la competencia matemática resuelve problemas de forma, movimiento y localización, en estudiantes del tercer grado de secundaria de la IE Paulo VI, Paucarpata, 2019* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa].

Ayala Huillca, H. (2020). *Efecto de la aplicación del software GeoGebra en el logro de competencias de rectas y cónicas de los estudiantes de una Universidad pública del Cusco, 2020* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle].

Cáceres, P. (2016). *Guía para la creación de módulos de aprendizaje*. Universidad Politécnica de Valencia.

Carrillo, A. A. (2009). *Geogebra*. Alfaomega.

Castañeda Paredes, K. V. (2020). *Actividades de aprendizaje para la enseñanza de la matemática utilizando GeoGebra y Wolfram Mathematica para estudiantes de décimo año de educación general básica de la unidad educativa "Capitán Edmundo*

Chiriboga" [Trabajo de grado, Universidad Nacional de Chimborazo].

Chirino, M. A. (2019). *Efectos de la aplicación del Programa Interactuemos con el Geogebra en el logro de los aprendizajes de las Competencias Matemáticas en los estudiantes de 1° de secundaria de la IE Parroquial Cristo Rey, UGEL 07*. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle.

Córdova Castañeda, E. S. (2019). *Aplicación de geogebra en el logro de la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio en estudiantes de cuarto grado de secundaria de la Institución educativa "Francisco Irazola"* [Tesis de maestría, Universidad Católica los Ángeles de Chimbote]

Díaz-Barriga Arceo, F. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. McGraw Hill Interamericana Editores S.A.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el Aprendizaje de la Matemática y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Figueroa G, R. (2018). *Geometría Analítica.* Editores RFG.

Galarza Baque, G. A. (2021). GeoGebra para mejorar el aprendizaje de matemática en estudiantes de primero de bachillerato, del Distrito 09D06 de Guayaquil. *Journal of Development,* 2(5), p.8381-8405.

Guevara Fabián, R. D. (2021). Geogebra en el desarrollo de competencias matemáticas, en estudiantes de la Institución Educativa Santa Edelmira, Víctor Larco 2021. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 5*(4), 5168-5183. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.683

Hernández Sampieri R, F. C. (2015). *Metodología de la investigación.* McGraw Hill.

Hernández, H. A. (2021). *Resolución de Problemas con GeoGebra en la formación inicial de profesores de matemáticas: Un Análisis desde la Actividad Matemática* [Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna].

Dioses Moran, L. (2024). Programa de estrategias de resolución de problemas para fortalecer el pensamiento divergente en matemáticas en estudiantes de secundaria. *Universidad Ciencia y Tecnología,* 28, 67-76.

Ledesma, R. M. (2002). Análisis de consistencia interna mediante Alfa de Cronbach: un programa basado en gráficos dinámicos. *Psico-USF, 7*(2), 143-152.

Licera, C. E. (2016). *La Hiperbola. Una actividad de estudio e investigación articulación entre la Geometría sintética y Geometría analítica.* Universidad Nacional de Río Cuarto.

Mancilla, F. M. (2005). Módulo de aprendizaje. Un instrumento para el desarrollo de la autonomía profesional docente. *Revista Investigaciones en Educación, 5*(2), 95-116.

Mejia Alemán, L. V. (2016). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del primer ciclo en la asignatura de Matemática I de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad Nacional de Piura, semestre 2014-II. [Tesis doctoral, Universidad Nacional de Piura]

Mejía Osorio, G. (2021). *Representaciones semióticas de objetos matemáticos y articulación de sentidos en situaciones de tratamiento. El caso de los profesores de* *matemáticas* [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco Jose *de Caldas].*

Mendoza Bolo, M. E. (2003). *El wimplot como recurso didáctico en la enseñanza de la matemática.* Horizonte.

Morales, M. Z. (2023). *Coordinación de principios de las teorías de la educación matemática para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Federico Villarreal].

Núñez Rojas, E. F. (2017). *Representación semiótica como estrategia didáctica y competencias matemáticas en estudiantes del segundo grado de secundaria de la Institución Educativa Privada Educare de Chosica* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle].

Oliden, P. E. (2003). Sobre la validez de los tests. *Psicothema, 15*(2), 315-321.

Pacheco Noriega, I. (2023). *GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes del*

Instituto "Pedro Monge Córdova" Jauja-2021. Universidad Peruana Los Andes.

Pariente Chocano, E. F. (2023). *Modelación matemática y el aprendizaje de cónicas en los estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Tecnológica del Perú* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de San Agustín].

Pérez, E. G. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *Revista AMIUTEM, 7*(2), 88–97.

Pineda, M. W. (2021). Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse usando Geogebra. *Redipe, 11*(3), 258-269

Ramírez Carrasco, M. C. (2025). *El software GeoGebra y la comunicación de ideas matemáticas sobre la hipérbola en estudiantes de economía de la Universidad Nacional de Piura, 2024* [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Piura]

Rendón-Macías, M. E.-K.-N. (2016). Estadística descriptiva. *Revista Alergia, 63*(4).

Rodriguez, C. (2017). *Objetos de Aprendizaje con eXeLearning y GeoGebra para la definición y representación geométrica de operaciones con vectores y sus aplicaciones* [Tesis de doctorado, Universidad de Salamanca]

Rufino, S. M. (2024). *Software GeoGebra y estrategias lúdicas en el aprendizaje de matemática en estudiantes de una entidad educativa estatal de Piura, 2023* [Tesis de doctorado, Universidad César Vallejo].

Segade Pampín, M. E. (2022). *El desarrollo de la imagen conceptual del triángulo en el alumnado de Educación Primaria utilizando GeoGebra* [Tesis de doctorado, Universidade Da Coruña].

Vera Gutierrez, C. (2003). *Matemática Básica.* Moshera.

Religación

Press

Ideas desde el Sur Global

Religación
Press

ISBN: 978-9942-561-48-0
9 789942 561480